

2013年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて解答用紙の所定の箇所に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (7) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (8) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

〔 I 〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号の付いた の中に記入せよ。

サッカーの国際大会に日本、A 国および B 国の 3 国が参加し、優勝国は次のように決定される。

(i) 3 つの国のうち 2 つの国が試合をする。勝った国が残りの 1 つの国と試合をし、2 連勝する国が生じるまで試合を繰り返す。この連勝国を優勝国とし、大会を終了する。

(ii) 各試合において、引き分けは無く、必ず勝敗が決まる。

日本が A 国、B 国に勝つ確率をそれぞれ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ とし、A 国が B 国に勝つ確率は $\frac{2}{3}$ とする。第 1 戦は日本と A 国が対戦する。

第 2 戦で日本が優勝する確率は ア であり、第 3 戦で日本が優勝する確率は イ であり、第 4 戦で日本が優勝する確率は ウ であり、第 5 戦で日本が優勝する確率は エ である。ゆえに第 $3n+2$ 戦 (n は 0 以上の整数) で日本が優勝する確率 p_n は $p_n =$ オ となる。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n p_k =$ カ となる。一方、第 7 戦で日本が優勝する確率は キ となる。第 $3n+1$ 戦 (n は 1 以上の整数) で日本が優勝する確率 q_n は $q_n =$ ク となる。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n q_k =$ ケ となる。また第 $3n$ 戦 (n は 1 以上の整数) で日本が優勝する確率 r_n は $r_n =$ コ となる。

〔 II 〕 座標空間において 3 点 $A(0, 0, 4)$, $B(a, 1, 2)$, $C(x, y, 0)$ をとる。ただし a は正の実数とする。次の問いに答えよ。

- (1) $AB = BC$ となる条件を a, x, y を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ が直交する条件を a, x, y を用いて表せ。
- (3) $AB = BC$ かつ $\angle ABC$ が直角となる点 C が存在する a の値の範囲を求めよ。

〔Ⅲ〕 定数 a ($a > 1$) に対して曲線 $y = a^x$, x 軸 および y 軸, 直線 $x = 1$ で囲まれた図形を S とし, 曲線 $y = a^{2x}$, 曲線 $y = a^x$ および直線 $x = 1$ で囲まれた図形を D とする. 次の問いに答えよ.

- (1) S を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積 $V(a)$ を求めよ.
- (2) D を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積 $W(a)$ を求めよ.
- (3) $V(a) = W(a)$ となる a の値を求めよ.
- (4) 極限值 $\lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{W(a)}{a-1}$ を求めよ.

〔Ⅳ〕 k は定数とし, 媒介変数 t を用いて $x = 2 \sin^3 t$, $y = k \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) と表される曲線 S を考える. 次の問いに答えよ.

- (1) $\frac{dy}{dx}$ を k, t を用いて表せ. ただし $0 < t < \frac{\pi}{2}$ とする.
- (2) 曲線 S が直線 $x + y = 1$ に第 1 象限で接しているとき, 接点の座標を (p, q) とする. p, q, k の値を求めよ. また, そのときの t の値 t_0 を求めよ.
- (3) (2) で定まる t_0 に対し, $\int_0^{t_0} \cos^4 t \, dt$, $\int_0^{t_0} \cos^6 t \, dt$ の値をそれぞれ求めよ.
- (4) (2) で定まる p, q, k, t_0 に対し, $0 \leq x \leq p$ で曲線 S , 直線 $x + y = 1$ と y 軸で囲まれる図形の面積を求めよ.

以下余白

