

【I】

【解答】

$$\text{ア} \quad a > 0$$

$$\text{イ} \quad -\frac{2a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{ウ} \quad y = (3p^2 - a)x - 2p^3$$

$$\text{エ} \quad -2p$$

$$\text{オ} \quad -p$$

$$\text{カ} \quad 6p^4$$

$$\text{キ} \quad 0 < t < 2\sqrt{a}$$

$$\text{ク} \quad \frac{3t - \sqrt{3(4a - t^2)}}{6}$$

$$\text{ケ} \quad \frac{3t + \sqrt{3(4a - t^2)}}{6}$$

$$\text{コ} \quad \frac{t}{2} \left(\frac{4a - t^2}{3} \right)^{\frac{3}{2}}$$

【解説】

まず、 $f(x)$ を微分して導関数を求めると、

$$f'(x) = 3x^2 - a$$

である。よって、 $f(x)$ が極値を持つためには、 $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつことが必要十分であり、その条件は

$$a > 0$$

である。この条件を満たすとき、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	...	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

よって、 $x = \sqrt{\frac{a}{3}}$ で極小となるから、この関数の極小値は

$$f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = -\frac{2a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}$$

である。次に、点 $P(p, p^3 - ap)$ における接線の傾きは $3p^2 - a$ で点 P を通るから、この接線 L

の方程式は、

$$y = (3p^2 - a)(x - p) + p^3 - ap$$

$$\Leftrightarrow y = (3p^2 - a)x - 2p^3$$

となる。また、 C と L の方程式を連立すると

$$x^3 - ax = (3p^2 - a)x - 2p^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3p^2x + 2p^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - p)^2(x + 2p) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = p, -2p$$

より、

$$q = -2p$$

となる。点 $R(r, f(r))$ における接線が L と平行であるとき、

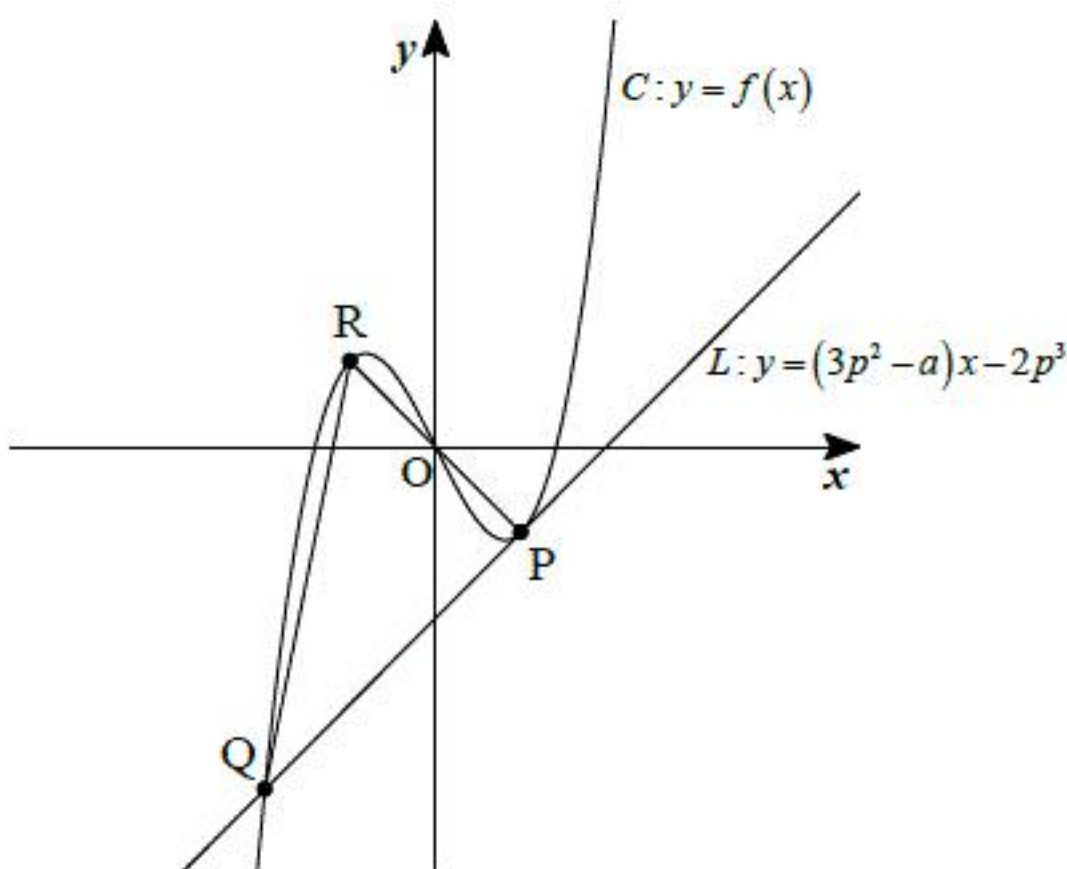
$$f'(p) = f'(r)$$

$$\Leftrightarrow 3p^2 - a = 3r^2 - a$$

$$\Leftrightarrow r^2 = p^2$$

$$\therefore r = -p (\because r \neq p, p \neq 0)$$

である。



線分 PQ の長さは、

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{\{p - (-2p)\}^2 + \{(p^3 - ap) - (-8p^3 + 2ap)\}^2} \\ &= 3|p|\sqrt{(3p^2 - a)^2 + 1} \end{aligned}$$

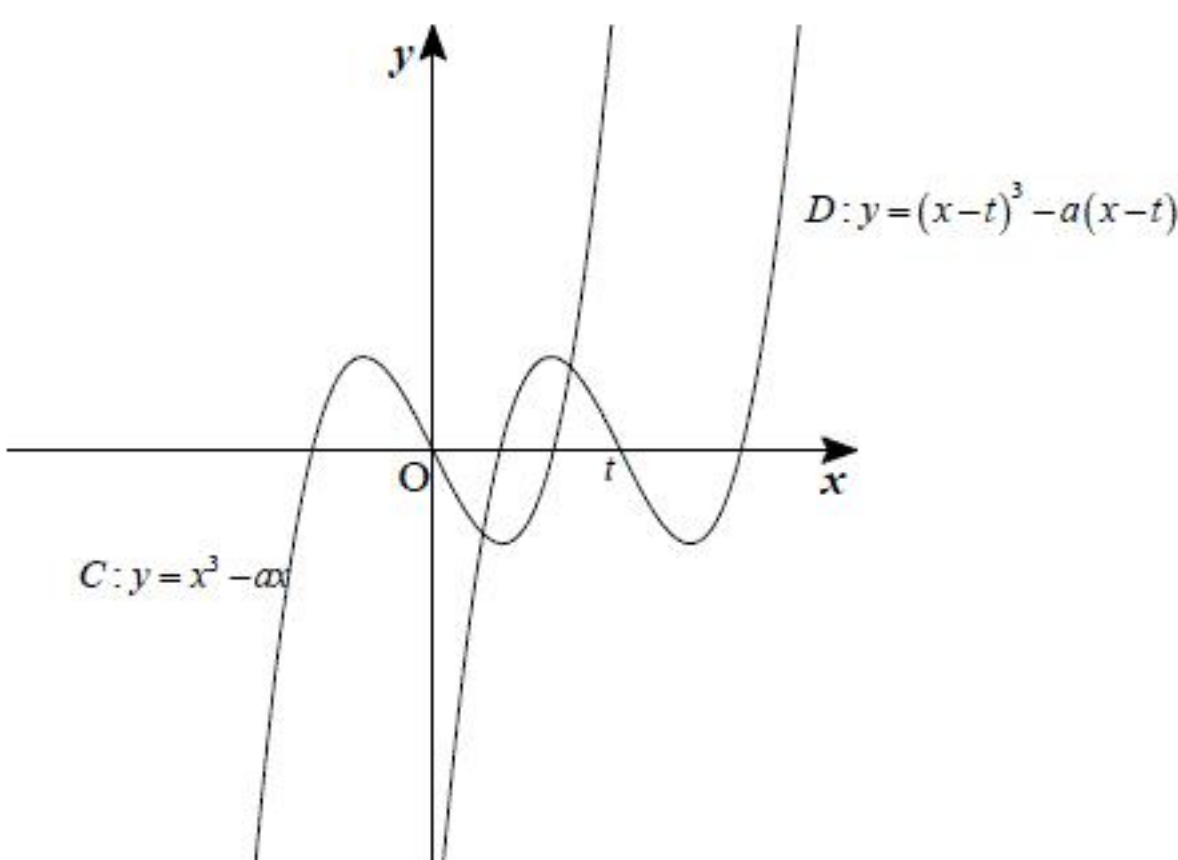
である。また、点と直線の距離の公式から、直線 L と点 R との距離は、

$$\frac{|(3p^2 - a) \cdot (-p) - (-p^3 + ap) - 2p^3|}{\sqrt{(3p^2 - a)^2 + 1}} = \frac{4|p^3|}{\sqrt{(3p^2 - a)^2 + 1}}$$

となる。よって $\triangle PQR$ の面積 M は、

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \left(3|p|\sqrt{(3p^2 - a)^2 + 1} \right) \cdot \frac{4|p^3|}{\sqrt{(3p^2 - a)^2 + 1}} \\ &= 6p^4 \end{aligned}$$

と求まる。



x 軸正の方向に $t > 0$ だけ C を平行移動した曲線 D の方程式は、

$$y = (x - t)^3 - a(x - t)$$

である。よって、2 曲線 C, D が異なる 2 つの共有点をもつためには、 x の 2 次方程式

$$x^3 - ax = (x - t)^3 - a(x - t)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - ax = x^3 - 3tx^2 + 3t^2x - t^3 - ax + at$$

$$\Leftrightarrow 3tx^2 - 3t^2x + t^3 - at = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が異なる 2 つの実数解をもてばよい。よって、判別式について、

$$(-3t^2)^2 - 4 \cdot 3t \cdot (t^3 - at)$$

$$= 3t^2(4a - t^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow 4a - t^2 > 0 \quad (\because t^2 > 0)$$

$$\therefore 0 < t < 2\sqrt{a} \quad (\because t > 0, a > 0)$$

となる。また、 $0 < t < 2\sqrt{a}$ のもとで $\textcircled{1}$ を解くと、

$$x = \frac{3t^2 \pm \sqrt{3t^2(4a - t^2)}}{6t}$$

$$= \frac{3t \pm \sqrt{3(4a - t^2)}}{6}$$

となるので、

$$\alpha = \frac{3t - \sqrt{3(4a - t^2)}}{6}, \beta = \frac{3t + \sqrt{3(4a - t^2)}}{6}$$

となる。また、2 曲線 C, D で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{(x - t)^3 - a(x - t) - (x^3 - ax)\} dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (-3tx^2 + 3t^2x - t^3 + at) dx$$

$$= -3t \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= -3t \cdot \frac{-1}{6} (\beta - \alpha)^3$$

$$= \frac{t}{2} \left(\frac{\sqrt{3(4a - t^2)}}{3} \right)^3$$

$$= \frac{t}{2} \left(\frac{4a - t^2}{3} \right)^{\frac{3}{2}}$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)

2 次方程式 $t^2 + pt + q = 0$ の解が虚数となるので、判別式について

$$p^2 - 4q < 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。以下、条件①のもとで考える。2 次方程式 $t^2 + pt + q = 0$ を解くと

$$t = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{4q - p^2}i}{2}$$

となる。まず、 $\alpha = \frac{-p + \sqrt{4q - p^2}i}{2}$ である場合を考える。このとき

$$\begin{aligned} \alpha(2 - \alpha) &= \frac{-p + \sqrt{4q - p^2}i}{2} \left(2 - \frac{-p + \sqrt{4q - p^2}i}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -p^2 - 2p + 2q + (2 + p)\sqrt{4q - p^2}i \right\} \end{aligned}$$

となる。よって、 $\alpha(2 - \alpha)$ が実数であるとき

$$\begin{aligned} (2 + p)\sqrt{4q - p^2} &= 0 \\ \therefore p &= -2 \left(\because \sqrt{4q - p^2} > 0 \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに、このとき $\alpha(2 - \alpha) < 2$ となる条件は、②の実部について

$$\frac{1}{2} \cdot 2q < 2 \quad \therefore q < 2$$

となる。また、 $p = -2$ を①に代入すると

$$4 - 4q < 0 \quad \therefore q > 1$$

となる。よって、求める条件は

$$p = -2, 1 < q < 2$$

となる。次に $\alpha = \frac{-p - \sqrt{4q - p^2}i}{2}$ である場合を考える。このとき

$$\alpha(2 - \alpha) = \frac{1}{2} \left\{ -p^2 - 2p + 2q - (2 + p)\sqrt{4q - p^2}i \right\}$$

となり、 $\alpha = \frac{-p + \sqrt{4q - p^2}i}{2}$ の場合と求める条件が一致することが分かる。以上より、求める条件は $p = -2, 1 < q < 2$ となる。

(答) $p = -2, 1 < q < 2$

(2)

(1)より $\beta = \frac{2 - \sqrt{4q - 4}i}{2} = 1 - \sqrt{q - 1}i$ であることが分かる。よって

$$\begin{aligned} \beta(1 - \beta) &= (1 - \sqrt{q - 1}i)\sqrt{q - 1}i \\ &= (q - 1) + \sqrt{q - 1}i \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{cases} y = q - 1 \\ x = \sqrt{q - 1} \end{cases}$$

と求まる。ここで、 $1 < q < 2$ から

$$0 < x < 1$$

となり、連立方程式から q を消去すると

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{y} \\ \therefore y &= x^2 \end{aligned}$$

となるので、 $P(x, y)$ の軌跡は放物線 $y = x^2$ ($0 < x < 1$) である。

(答) 放物線 $y = x^2$ ($0 < x < 1$)

(3)

$P(x, y)$ と $Q(0, 1)$ の距離は

$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

となる。ここで、 $y = x^2$ を用いると

$$\begin{aligned} \sqrt{y + (y - 1)^2} &= \sqrt{y^2 - y + 1} \\ &= \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

となる。今、 $0 < x < 1$ より $0 < y < 1$ であるので、 $P(x, y)$ と $Q(0, 1)$ の距離は $y = \frac{1}{2}$ のとき最小と

なり、その値は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ であることが分かる。また、このとき点 P の座標は $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ となる。

(答) P の座標 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 、 PQ の距離 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

〔Ⅲ〕

(1)

条件より

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{AC} &= |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cos \theta \\ &= t \cos \theta\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = t \cos \theta$

(2)

$\triangle AHC$ に注目すると

$$\begin{aligned}AH &= AC \cos \theta \\ &= t \cos \theta\end{aligned}$$

より

$$\overline{AH} = (t \cos \theta) \vec{a}$$

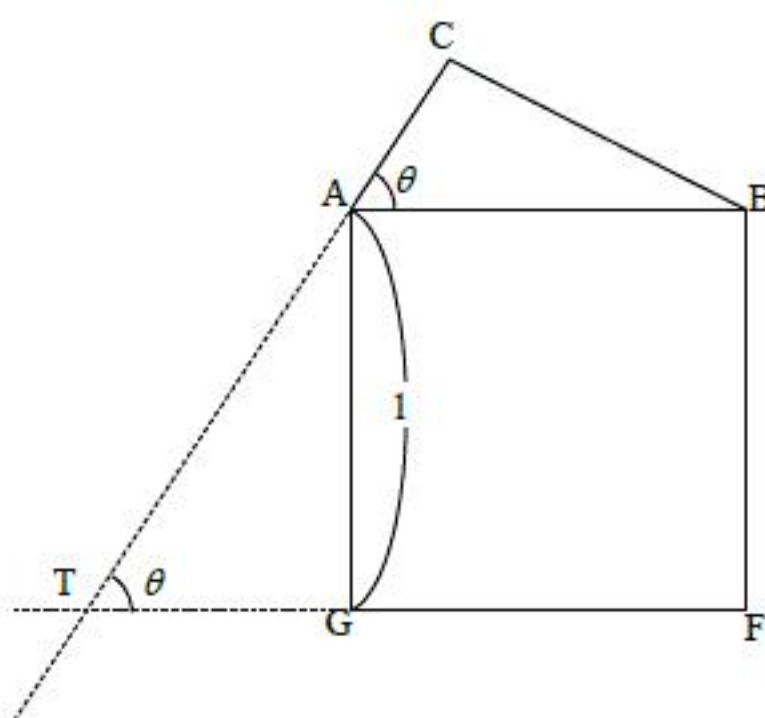
である。従って

$$\begin{aligned}\overline{HC} &= \overline{AC} - \overline{AH} \\ &= \vec{b} - (t \cos \theta) \vec{a}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\overline{HC} = \vec{b} - (t \cos \theta) \vec{a}$

(3)



図のように直線 AC と直線 GF の交点を T とおくと

$$AT = \frac{1}{\sin \theta}, \quad TG = \frac{1}{\tan \theta}$$

である。従って $\overline{AG}$ は

$$\begin{aligned}\overline{AG} &= \overline{AT} + \overline{TG} \\ &= -\frac{1}{t \sin \theta} \vec{b} + \frac{1}{\tan \theta} \vec{a}\end{aligned}$$

である。同様にして $\overline{AE}$ は

$$\overline{AE} = \frac{1}{\tan \theta} \vec{b} - \frac{t}{\sin \theta} \vec{a}$$

と求まる。従って

$$\begin{aligned}\overline{AM} &= \frac{1}{2} (\overline{AG} + \overline{AE}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\tan \theta} - \frac{t}{\sin \theta} \right) \vec{a} + \left(\frac{1}{\tan \theta} + \frac{1}{t \sin \theta} \right) \vec{b} \right\}\end{aligned}$$

である。これと、(1)の $\vec{a} \cdot \vec{b} = t \cos \theta$ を用いると

$$\begin{aligned}\overline{AM} \cdot \overline{BC} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\tan \theta} - \frac{t}{\sin \theta} \right) \vec{a} + \left(\frac{1}{\tan \theta} + \frac{1}{t \sin \theta} \right) \vec{b} \right\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{1}{\tan \theta} + \frac{t}{\sin \theta} \right) + \left(-\frac{1}{\tan \theta} + \frac{1}{t \sin \theta} + \frac{1}{\tan \theta} - \frac{t}{\sin \theta} \right) t \cos \theta + \left(\frac{1}{\tan \theta} - \frac{1}{t \sin \theta} \right) t^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{1}{\tan \theta} + \frac{t}{\sin \theta} \right) + \left(\frac{1}{\tan \theta} - \frac{t^2}{\tan \theta} \right) + \left(\frac{t^2}{\tan \theta} - \frac{t}{\sin \theta} \right) \right\} \\ &= 0\end{aligned}$$

となるので AM と BC は直交する。

(証明終)

(4)

(3)より

$$\overline{AG} = \frac{1}{\tan \theta} \vec{a} - \frac{1}{t \sin \theta} \vec{b}, \quad \overline{AE} = -\frac{t}{\sin \theta} \vec{a} + \frac{1}{\tan \theta} \vec{b}$$

である。

(答) $\overline{AG} = \frac{1}{\tan \theta} \vec{a} - \frac{1}{t \sin \theta} \vec{b}, \quad \overline{AE} = -\frac{t}{\sin \theta} \vec{a} + \frac{1}{\tan \theta} \vec{b}$

(5)

$\overline{AP}$ を実数 l, m を用いて2通りで表すと

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \overline{AH} + \overline{HP} \\ &= \overline{AH} + l \overline{HC} \\ &= (t \cos \theta) \vec{a} + l \{ \vec{b} - (t \cos \theta) \vec{a} \} \\ &= (1-l)t(\cos \theta) \vec{a} + l \vec{b}, \\ \overline{AP} &= 2m \overline{AM} \\ &= m \left(\frac{1}{\tan \theta} - \frac{t}{\sin \theta} \right) \vec{a} + m \left(\frac{1}{\tan \theta} + \frac{1}{t \sin \theta} \right) \vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立なので

$$\begin{cases} (1-l)t \cos \theta = m \left(\frac{1}{\tan \theta} - \frac{t}{\sin \theta} \right) \\ l = m \left(\frac{1}{\tan \theta} + \frac{1}{t \sin \theta} \right) \end{cases}$$

である。これより

$$l = \frac{(1-t \cos \theta) \cos \theta}{t \sin^2 \theta}, \quad m = -\frac{1}{\tan \theta}$$

となるので

$$\overline{AP} = \cos \theta \left(t - \frac{\cos \theta (1-t \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \right) \vec{a} + \frac{(1-t \cos \theta) \cos \theta}{t \sin^2 \theta} \vec{b}$$

である。

(答) $\overline{AP} = \cos \theta \left(t - \frac{\cos \theta (1-t \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \right) \vec{a} + \frac{(1-t \cos \theta) \cos \theta}{t \sin^2 \theta} \vec{b}$

(6)

(5)より

$$\begin{aligned}\overline{BP} \cdot \overline{AC} &= (\overline{AP} - \overline{AB}) \cdot \overline{AC} \\ &= \left\{ \cos \theta \left(t - \frac{\cos \theta (1-t \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \right) \vec{a} + \frac{(1-t \cos \theta) \cos \theta}{t \sin^2 \theta} \vec{b} - \vec{a} \right\} \cdot \vec{b} \\ &= t \cos^2 \theta \left(t - \frac{\cos \theta (1-t \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{t(1-t \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta} - t \cos \theta \\ &= t \left(t \cos^2 \theta - \cos \theta + \frac{(1-t \cos \theta)(\cos \theta - \cos^3 \theta)}{\sin^2 \theta} \right) \\ &= t (t \cos^2 \theta - \cos \theta + (1-t \cos \theta) \cos \theta) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overline{BP} \cdot \overline{AC} = 0$