

〔 I 〕

〔解答〕

ア	$\frac{1}{3}$	イ	$\frac{5}{18}$	ウ	$\frac{2}{9}$	エ	$\frac{2\sqrt{2}}{9} + \frac{1}{2}$
オ	$(-1, 0)$	カ	$(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$	キ	$(-2\sin^2 \theta, \sin 2\theta)$		
ク	$(-2\sin^2 \theta, \sin 2\theta)$	ケ	1	コ	$(1 - 4\sin^2 \theta, 0)$		

〔解説〕

(1)

1 回の試行における確率分布は以下の通りである。

出た目を 4 で割った余り	1	2	3	0
その余りになる目	1, 5	2, 6	3	4
生起確率	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

したがって、さいころを 1 回振って頂点が 1 となる確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である。

次に、さいころを 2 回振って選んだ頂点が一致する確率は、4 で割った余りが同じになる目の出方を 2 回繰り返せばよいので、

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$

である。また、さいころを 2 回振って選んだ 2 つの頂点の距離を r とおくと、 $r = \sqrt{2}$ となる頂点の組み合わせは、 $(0, 2)$ 、 $(1, 3)$ の 2 通りである。頂点の組み合わせが $(0, 2)$ となる確率は、目の出る順序が 2 通りあることに注意すると

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{1}{9}$$

であり、同様にして、目の出方の組み合わせが $(1, 3)$ となる確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{9}$$

である。したがって、 $r = \sqrt{2}$ となる確率は

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

である。また、 r の取り得る値は $0, 1, \sqrt{2}$ の 3 通りであり、 $r = 0$ となる確率は、さいころを 2 回振って選んだ頂点が一致する確率に等しく $\frac{5}{18}$ であるから、 $r = 1$ となる確率は、余事象を考えて、

$$1 - \frac{5}{18} - \frac{2}{9} = \frac{1}{2}$$

となる。従って、 r の期待値は

$$0 \cdot \frac{5}{18} + 1 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{9} + \frac{1}{2}$$

である。

(2)

$(x, y) = (-1, 0)$ は常に方程式 $y = (\tan \theta)(x + 1)$ を満たすから、点 A の座標は $(-1, 0)$ である。また、円 C の方程式 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 L の方程式 $y = (\tan \theta)(x + 1)$ を連立すると、

$$\begin{aligned} x^2 + (\tan \theta)^2 (x + 1)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (\tan^2 \theta + 1)x^2 + 2(\tan^2 \theta)x + \tan^2 \theta - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)\{(\tan^2 \theta + 1)x + \tan^2 \theta - 1\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x - \cos 2\theta) &= 0 \end{aligned}$$

となるから、点 P の x 座標は $\cos 2\theta$ であり、したがって、点 P の y 座標が $y > 0$ を満たし、点 P が単位円周上の点であることから、点 P の座標は $(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ である。また、直線 L の傾きが $\tan \theta$ であることから、原点 O と点 Q を通る直線の式は

$$y = -\frac{1}{\tan \theta}x$$

となる。従って、点 Q の y 座標を q とおくと、点 Q の座標は $(-q \tan \theta, q)$ と表せる。OA = OP より、点 A と点 P の中点の y 座標は、原点 O と点 Q の中点の y 座標と一致するから、

$$\begin{aligned} \frac{0 + \sin 2\theta}{2} &= \frac{0 + q}{2} \\ \Leftrightarrow q &= \sin 2\theta \end{aligned}$$

が成立する。よって、点 Q の座標は

$$(-\sin 2\theta \cdot \tan \theta, \sin 2\theta) = (-2\sin^2 \theta, \sin 2\theta)$$

となる。また、直線 AP に関して円 C 対称なに対称な図形は、中心の座標が $(-2\sin^2 \theta, \sin 2\theta)$ 、半径が 1 の円 S であり、その方程式は

$$(x + 2\sin^2 \theta)^2 + (y - \sin 2\theta)^2 = 1$$

で与えられる。従って、点 A 以外の円 S と x 軸の共有点の座標は、

$$\begin{aligned} (x + 2\sin^2 \theta)^2 + (-\sin 2\theta)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4(\sin^2 \theta)x + 4\sin^2 \theta - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x + 4\sin^2 \theta - 1) &= 0 \end{aligned}$$

より $(1 - 4\sin^2 \theta, 0)$ である。

〔Ⅱ〕

(1)

与式を変形すると、

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_4 y &= 4 \\ \Leftrightarrow \log_4 y &= \log_4 4^4 - \frac{\log_4 x}{\log_4 2} \\ \Leftrightarrow \log_4 y &= \log_4 \frac{4^4}{x^2} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{256}{x^2}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{256}{x^2}$$

(2)

(1)の結果を利用すると、相加平均 $\geq$ 相乗平均より、

$$\begin{aligned}x^2 + y &\geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{256}{x^2}} \\ &= 32\end{aligned}$$

である。等号成立は、

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{256}{x^2} \\ \Leftrightarrow x &= 4\end{aligned}$$

のときであり、このとき $y=16$ である。

$$(\text{答}) \quad x^2 + y \text{ の最小値 } 32, \quad x=4, y=16$$

(3)

$\log_4 y = t$ とおくと、 t はすべての実数を動く。また、 $\log_2 y = 2t$, $\log_2 x = 4 - t$ より、

$$\begin{aligned}(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 &= (4 - t)^2 + (2t)^2 \\ &= 5t^2 - 8t + 16 \\ &= 5\left(t - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{64}{5}\end{aligned}$$

となる。したがって、 $t = \frac{4}{5}$ 、すなわち $y = 4^{\frac{4}{5}}$ のとき、 $(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2$ は最小値 $\frac{64}{5}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{64}{5}$$

(4)

(3)より、 $x = 2^{4-t}$, $y = 4^t$ が正の整数となる t の値の中で、 $t = \frac{4}{5}$ に最も近いものを考えればよ

い。したがって、 $t=1$ のとき、 $(\log_2 m)^2 + (\log_2 n)^2$ は最小となり、このとき $m=8$, $n=4$ である。

$$(\text{答}) \quad m=8, n=4$$

〔Ⅲ〕

(1)

$f'(x)=3x^2$ より、接線 L の方程式は

$$y=3a_n^2(x-a_n)+a_n^3-A^3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。もし、 $a_n=0$ となる n があれば、接線は $y=-A^3$ となって、 x 軸と交わらず、次の a_{n+1} が定義されない。まず、 $a_n \neq 0$ となっていることを確かめる必要がある。

$a_n \leq 0$ となる n が存在したとし、そのような n のうちで最小のものを n_0 とする。このとき、

n_0 の取り方から、 $a_{n_0-1} > 0$ であり、また、 $y=3a_{n_0-1}^2(x-a_{n_0-1})+a_{n_0-1}^3-A^3$ と x 軸の交点が

$(a_{n_0}, 0)$ であるから、

$$\begin{aligned} 0 &= 3a_{n_0-1}^2(a_{n_0}-a_{n_0-1})+a_{n_0-1}^3-A^3 \\ \Leftrightarrow 3a_{n_0-1}^2a_{n_0} &= 2a_{n_0-1}^3+A^3 \end{aligned}$$

となるが、 $3a_{n_0-1}^2a_{n_0} < 0$ であり、一方、 $2a_{n_0-1}^3+A^3 > 0$ であるので、矛盾である。したがって、常に、 $a_n > 0$ であり、 $\{a_n\}$ は正しく定義されていることがわかった。

したがって、 $\textcircled{1}$ が $(a_{n+1}, 0)$ を通ることから、

$$0=3a_n^2(a_{n+1}-a_n)+a_n^3-A^3 \Leftrightarrow 3a_n^2a_{n+1}=2a_n^3+A^3$$

となり、両辺を $3a_n^2 > 0$ で割ることにより、

$$a_{n+1}=\frac{2a_n^3+A^3}{3a_n^2}$$

と表すことができる。

$$(\text{答}) \quad a_{n+1}=\frac{2a_n^3+A^3}{3a_n^2}$$

(2)

$a_1=1$ 及び $A>1$ より、

$$\begin{aligned} a_2-A &= \frac{2a_1^3+A^3}{3a_1^2}-A \\ &= \frac{A^3-3A+2}{3} \\ &= \frac{(A-1)^2(A+2)}{3} \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるため、 $a_2 > A$ である。また、 $n=k$ のとき $a_k > A$ が成り立つと仮定すると、 $n=k+1$ のとき、

$$\begin{aligned} a_{k+1}-A &= \frac{2a_k^3+A^3}{3a_k^2}-A \\ &= \frac{2a_k^3-3a_k^2A+A^3}{3a_k^2} \\ &= \frac{2a_k^3-2a_k^2A-a_k^2A+A^3}{3a_k^2} \\ &= \frac{2a_k^2(a_k-A)-A(a_k-A)(a_k+A)}{3a_k^2} \\ &= \frac{(a_k-A)\{2a_k^2-Aa_k-A^2\}}{3a_k^2} \\ &= \frac{(a_k-A)^2(2a_k+A)}{3a_k^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるため、 $a_{k+1} > 0$ も成立する。従って、数学的帰納法により、2以上の整数 n に対して $a_n > A$ が成り立つ。

(3)

(2)より、2以上の整数 n に対して $a_n > A$ が成り立つから、

$$\begin{aligned} a_n-a_{n+1} &= a_n-\frac{2a_n^3+A^3}{3a_n^2} \\ &= \frac{a_n^3-A^3}{3a_n^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

となる。従って、2以上の整数 n に対して、 $a_{n+1} < a_n$ が成り立つ。

(4)

(2)より、2以上の整数 n に対して $a_n > A$ が成り立つから、

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(a_n-A)-(a_{n+1}-A) &= \frac{2}{3}a_n-\frac{2a_n^3+A^3}{3a_n^2}+\frac{A}{3} \\ &= \frac{Aa_n^2-A^3}{3a_n^2} \\ &= \frac{A(a_n-A)(a_n+A)}{3a_n^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

となる。従って、2以上の整数 n に対して $a_{n+1}-A < \frac{2}{3}(a_n-A)$ が成り立つ。