

〔Ⅰ〕

〔解答〕

- (1) ア 37 イ 2
- (2) ウ $\sqrt{14}$ エ -3 オ $\frac{1}{2}\sqrt{299}$ カ $(-3, 2, 0)$ キ $\sqrt{41}$
- (3) ク $\frac{1}{6}$ ケ $\frac{12-k}{66}$ コ $\frac{13}{3}$

〔解説〕

(1)

25^{26} の常用対数をとると、

$$\begin{aligned}\log_{10} 25^{26} &= 26 \log_{10} \frac{10^2}{2} \\ &= 26(2 - 2 \log_{10} 2) \\ &= 36.348\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}36 &< \log_{10} 25^{26} < 37 \\ \therefore 10^{36} &< 25^{26} < 10^{37}\end{aligned}$$

となり、 25^{26} は 37 桁の数である。また、 25^{26} の最高位の数字を a とおくと、

$$\begin{aligned}a \times 10^{36} &< 25^{26} < (a+1) \times 10^{36} \\ \Leftrightarrow \log_{10} a + \log_{10} 10^{36} &< \log_{10} 25^{26} < \log_{10} (a+1) + \log_{10} 10^{36} \\ \Leftrightarrow \log_{10} a + 36 &< 36.348 < \log_{10} (a+1) + 36 \\ \Leftrightarrow \log_{10} a &< 0.348 < \log_{10} (a+1)\end{aligned}$$

が成立するため、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ より $a = 2$ となる。従って、 25^{26} の最高位の数字は 2 である。

(2)

$\overline{AB} = (2, 1, -3)$ より、

$$\begin{aligned}|\overline{AB}| &= \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{14}\end{aligned}$$

である。また、 $\overline{AC} = (-3, -3, -2)$ より、

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{AC} &= 2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-2) \\ &= -3\end{aligned}$$

である。更に、

$$\begin{aligned}|\overline{AC}| &= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{22}\end{aligned}$$

であるから、 $\triangle ABC$ の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 \cdot |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{14 \cdot 22 - (-3)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{299}\end{aligned}$$

である。また、4 面体 ABCD の外接球の中心の座標を $P(x, y, z)$ とし、その半径を r とおくと

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= (x-1, y+1, z-4) \\ \overline{BP} &= (x-3, y, z-1) \\ \overline{CP} &= (x+2, y+4, z-2) \\ \overline{DP} &= (x, y-6, z-4)\end{aligned}$$

であり、

$$|\overline{AP}|^2 = |\overline{BP}|^2 = |\overline{CP}|^2 = |\overline{DP}|^2 = r^2$$

が成り立つ。従って、

$$\begin{aligned}|\overline{AP}|^2 &= |\overline{BP}|^2 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 &= (x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 \\ \Leftrightarrow 2x + y - 3z &= -4 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overline{BP}|^2 &= |\overline{CP}|^2 \\ \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 &= (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 \\ \Leftrightarrow 5x + 4y - z &= -7 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overline{CP}|^2 &= |\overline{DP}|^2 \\ \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 &= x^2 + (y-6)^2 + (z-4)^2 \\ \Leftrightarrow x + 5y + z &= 7 \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

が得られる。①～③の式を連立させると、 $x = -3, y = 2, z = 0$ であり、

$$\begin{aligned}r &= |\overline{AP}| \\ &= \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{41}\end{aligned}$$

となる。以上より、4 面体 ABCD の外接球の中心の座標は $(-3, 2, 0)$ であり、その半径は $\sqrt{41}$ である。

(3)

玉の総数は 12 個であり、そのうち赤玉は 2 個であるため、1 回目に赤玉を取り出す確率は

$$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

である。また、 $2 \leq k \leq 11$ の時、 k 回目に初めて赤玉を取り出す確率は、 $k-1$ 回白玉を取り出してから赤玉を取り出す確率を考えればよいから、

$$\frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdots \frac{13-k}{15-k} \cdot \frac{12-k}{14-k} \cdot \frac{2}{13-k} = \frac{(12-k) \cdot 2}{12 \cdot 11} = \frac{12-k}{66}$$

となる。これは、 $k=1$ の時も成立する。また、初めて赤玉を取り出す回数の期待値は、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{11} k \cdot \frac{12-k}{66} &= \frac{1}{66} \left\{ 12 \cdot \frac{11 \cdot (11+1)}{2} - \frac{11 \cdot (11+1) \cdot (2 \cdot 11+1)}{6} \right\} \\ &= \frac{13}{3}\end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

x の値で場合分けして考える。

[1] $x \leq 3$ の場合

$$f(x) = -x^2(x-3) = -x^3 + 3x^2 \text{ より, } x < 3 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 6x \\ &= -3x(x-2) \end{aligned}$$

である。

[2] $x > 3$ の場合

$$f(x) = x^2(x-3) = x^3 - 3x^2 \text{ より,}$$

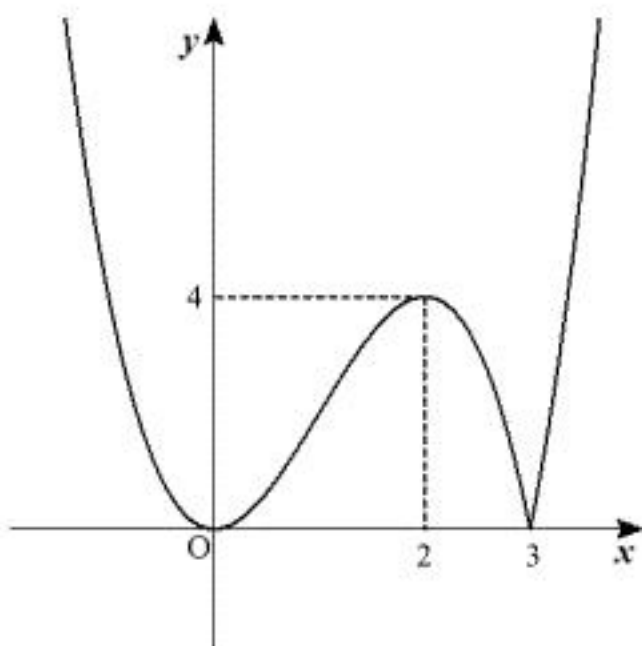
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ &= 3x(x-2) \end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]の場合より, 関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	0	...	2	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	/	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

また, 関数 $f(x)$ のグラフは次図のようになる。



(答) 前表と前図

(2)

曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = kx$ の接点の x 座標を t とおくと, (1)の図より $0 < t < 2$ である。従って, 接線の傾きについて,

$$\begin{aligned} f'(t) &= k \\ \Leftrightarrow -3t(t-2) &= k \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成立し, 接点の y 座標について,

$$\begin{aligned} f(t) &= k \\ \Leftrightarrow -t^2(t-3) &= kt \\ \Leftrightarrow -t(t-3) &= k \quad (\because t \neq 0) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成立する。①, ②式より

$$\begin{aligned} -t(t-3) &= -3t(t-2) \\ \Leftrightarrow t(2t-3) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{3}{2} \quad (\because 0 < t < 2), k = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

となる。

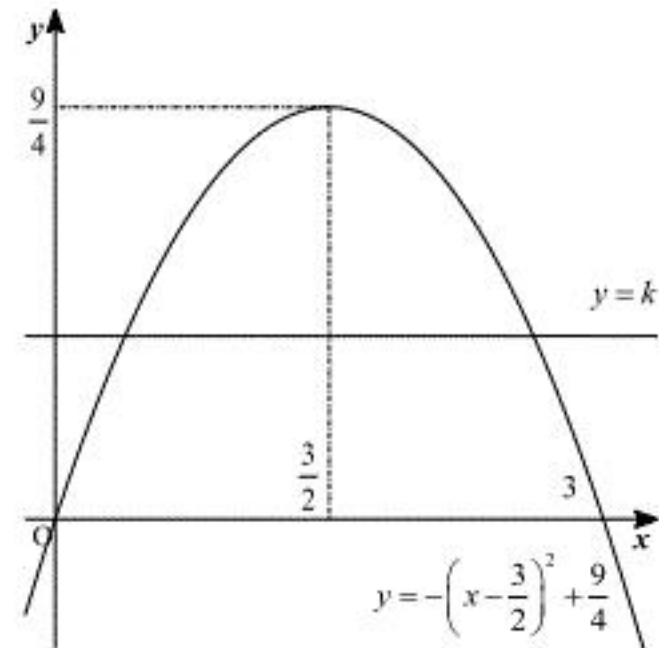
(答) $k = \frac{9}{4}$

(3)

(1)の図より, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = kx$ が共有点を4つ持つためには, $k > 0$ が必要で, このとき $x = 0$ で共有点をもち, 更に $x > 3$ の範囲でただ1つの共有点をもつ。よって, $0 < x < 3$ の範囲に共有点が2個存在すればよい。すなわち, $0 < x < 3$ において,

$$\begin{aligned} f(x) &= kx \\ \Leftrightarrow -x^2(x-3) &= kx \\ \Leftrightarrow -x^2 + 3x &= k \quad (\because x \neq 0) \\ \Leftrightarrow -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} &= k \end{aligned}$$

を満たす実数解が異なる2個存在すればよい。すなわち, 放物線 $y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$ と直線 $y = k$ が $0 < x < 3$ の範囲で異なる2つの共有点をもてばよい。



上のグラフより, 求める k の条件は $0 < k < \frac{9}{4}$ である。

(答) $0 < k < \frac{9}{4}$

(4)

まず, $x = 0$ において共有点を持つことは明らかである。また, (3)より, $0 < x < 3$ における共有点の x 座標は, 2次方程式

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x &= k \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x + k &= 0 \end{aligned}$$

の解として与えられるため, 解の公式より,

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4k}}{2}$$

である。最後に, $x > 3$ における共有点の x 座標を考えると,

$$\begin{aligned} f(x) &= kx \\ \Leftrightarrow x^2(x-3) &= kx \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - k &= 0 \quad (\because x \neq 0) \end{aligned}$$

を満たす x の値は

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4k}}{2}$$

であるが, このうち $x > 3$ を満たすのは

$$x = \frac{3 + \sqrt{9+4k}}{2}$$

のみである。従って, 4つの共有点の x 座標は, $x = 0, \frac{3 \pm \sqrt{9-4k}}{2}, \frac{3 + \sqrt{9+4k}}{2}$ である。

(答) $x = 0, \frac{3 \pm \sqrt{9-4k}}{2}, \frac{3 + \sqrt{9+4k}}{2}$

〔Ⅲ〕

(1)

数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 1$ 、公差 2 の等差数列であるため、

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 2(n-1) \\ &= 2n-1 \end{aligned}$$

である。

(答) $a_n = 2n-1$

(2)

(1)より、

$$a_j + a_k = 2(j+k) - 2$$

である。そこで、 $j < k$ を満たす 2 つの正の整数の組 (j, k) を、 $j+k$ の値が小さい順に列挙すると、

$$\begin{aligned} j+k=3 \text{ のとき、} & (j, k) = (1, 2) \\ j+k=4 \text{ のとき、} & (j, k) = (1, 3) \\ j+k=5 \text{ のとき、} & (j, k) = (1, 4), (2, 3) \\ j+k=6 \text{ のとき、} & (j, k) = (1, 5), (2, 4) \\ j+k=7 \text{ のとき、} & (j, k) = (1, 6), (2, 5), (3, 4) \\ j+k=8 \text{ のとき、} & (j, k) = (1, 7), (2, 6), (3, 5) \\ j+k=9 \text{ のとき、} & (j, k) = (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5) \end{aligned}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} b_6 &= 2 \cdot 6 - 2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} b_{15} &= 2 \cdot 9 - 2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

である。

(答) $b_6 = 10, b_{15} = 16$

(3)

$$\begin{aligned} a_j + a_k &= 2(j+k) - 2 \\ &= 2014 \end{aligned}$$

より、 $j+k=1008$ である。これと $j < k$ を満たす 2 つの正の整数の組 (j, k) は、

$$(j, k) = (1, 1007), (2, 1006), \dots, (503, 505)$$

の 503 個である。

(答) 503 個

(4)

(2)と同様の方針で考えると、 $j < k$ を満たす 2 つの正の整数の組 (j, k) が丁度 N 個となるのは、 $j+k=2N+1, 2N+2$ の時である。従って、

$$\begin{aligned} A &= 2(2N+1) - 2 \\ &= 4N \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} B &= 2(2N+2) - 2 \\ &= 4N+2 \end{aligned}$$

である。

(答) $A=4N, B=4N+2$

(5)

b_{71} が、数列 $\{b_n\}$ で丁度 m 回出現する数であるとする、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} 2k < 71 \leq \sum_{k=1}^m 2k \\ \Leftrightarrow m(m-1) < 71 \leq m(m+1) \end{aligned}$$

となる。これを満たす自然数 m は、 $m=8$ であるから、 b_{71} は数列 $\{b_n\}$ で丁度 8 回出現する数である。また、数列 $\{b_n\}$ で丁度 8 回出現する数が全て現れるのは、 b_{72} が現れた時である。従って、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{71} b_k &= \sum_{k=1}^{72} b_k - b_{72} \\ &= \sum_{N=1}^8 N \{4N + (4N+2)\} - (4 \cdot 8 + 2) \\ &= \sum_{N=1}^8 (8N^2 + 2N) - 34 \\ &= 8 \cdot \frac{8 \cdot (8+1) \cdot (16+1)}{6} + 2 \cdot \frac{8 \cdot (8+1)}{2} - 34 \\ &= 1670 \end{aligned}$$

となる。

(答) 1670