

【Ⅰ】

【解答】

- ア $\frac{1}{6}$ イ $\frac{2}{9}$
- ウ $\frac{13}{18}$ エ $\frac{3}{4}$
- オ $\frac{8}{9}$ カ $\frac{23}{36}$
- キ $\frac{23}{36}$ ク $\frac{7}{36}$
- ケ $\frac{1}{12}$ コ $\frac{1}{12}$

【解説】

(1)

直線 L が $x+y=0$ と平行になるのは、 $a=b$ のときである。したがって、直線 L が $x+y=0$ と平行になる確率は、

$$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

である。

$$\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=1 \\ \Leftrightarrow bx+ay-ab&=0\end{aligned}$$

であるから、原点 O と直線 L の距離は、

$$\frac{|b\cdot 0+a\cdot 0-ab|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}(\because a>0, b>0)$$

と表せる。よって、原点 O と直線 L の距離が 3 以上であるとき、

$$\begin{aligned}\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}&\geq 3 \\ \Leftrightarrow ab&\geq 3\sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$

が成り立つ。両辺正であるから、両辺を 2 乗すると、

$$\begin{aligned}a^2b^2&\geq 9(a^2+b^2) \\ \Leftrightarrow a^2(b^2-9)&\geq 9b^2\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。 $b\leq 3$ のとき、左辺は 0 以下であるのに対して、右辺は正数であるから、 $\textcircled{1}$ は成り立たず、不適である。よって、 $b\geq 4$ となる。このとき、

$$\textcircled{1}\Leftrightarrow a^2\geq \frac{9b^2}{b^2-9}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

となるので、 $\textcircled{2}$ を満たすような (a, b) を求める。

[1] $b=4$ のとき、

$$\frac{9b^2}{b^2-9}=\frac{144}{7}=20.5\cdots$$

となるので、 $a=5, 6$ のとき、 $\textcircled{2}$ を満たす。

[2] $b=5$ のとき、

$$\frac{9b^2}{b^2-9}=\frac{225}{16}=14.0\cdots$$

となるので、 $a=4, 5, 6$ のとき、 $\textcircled{2}$ を満たす。

[3] $b=6$ のとき、

$$\frac{9b^2}{b^2-9}=\frac{324}{27}=12$$

となるので、 $a=4, 5, 6$ のとき、 $\textcircled{2}$ を満たす。

[1], [2], [3] より、原点 O と直線 L の距離が 3 以上である確率は、

$$\frac{2+3+3}{36}=\frac{2}{9}$$

となる。

x 軸、 y 軸および直線 L で囲まれる三角形は 3 点 $(0, 0), (a, 0), (0, b)$ を頂点とする三角形である。したがって、

$$S=\frac{ab}{2}$$

となる。よって、 $S<3\Leftrightarrow ab<6$ となるのは、

$$(a, b)=(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), \\ (2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1), (5, 1)$$

の 10 通りであるから、 $S\geq 3$ となる確率は、

$$\frac{36-10}{36}=\frac{26}{36}=\frac{13}{18}$$

と求まる。また、 S が整数値となるには、 a, b のうち少なくとも 1 つが偶数となればよいので、

$$\frac{36-3\cdot 3}{36}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$$

となる。

x 軸、 y 軸および直線 L で囲まれる三角形は 3 点 $(0, 0), (a, 0), (0, b)$ を頂点とする三角形であるから、

$$T=a+b+\sqrt{a^2+b^2}$$

である。 $T<7$ となるのは、

$$(a, b)=(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$$

の 4 通りであるから、 $T\geq 7$ となる確率は、

$$\frac{36-4}{36}=\frac{32}{36}=\frac{8}{9}$$

と求まる。また、 $T<11$ となるのは、

$$(a, b)=(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1) \\ (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2) \\ (3, 3), (4, 1), (4, 2)$$

の 13 通りであるから、 $T\geq 11$ となる確率は、

$$\frac{36-13}{36}=\frac{23}{36}$$

と求まる。

第 1 象限において直線 L 上にある格子点の個数が 0 であるのは、 a, b が互いに素であるときであるから、

$$(a, b)=(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6) \\ (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 4) \\ (3, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 1), (5, 2) \\ (5, 3), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 5)$$

の 23 通りである。したがって、第 1 象限において直線 L 上にある格子点の個数が 0 になる確率は、

$$\frac{23}{36}$$

である。第 1 象限において直線 L 上にある格子点の個数が 1 個になるのは、

$$(a, b)=(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 6), (6, 2), (6, 4)$$

の 7 通りであるから、第 1 象限において直線 L 上にある格子点の個数が 1 個になる確率は、

$$\frac{7}{36}$$

である。第 1 象限において直線 L 上にある格子点の個数が 2 個になるのは、

$$(a, b)=(3, 3), (3, 6), (6, 3)$$

の 3 通りであるから、第 1 象限において直線 L 上にある格子点の個数が 2 個になる確率は、

$$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

である。第 1 象限において直線 L 上にある格子点の個数が 3 個以上になるのは、

$$(a, b)=(4, 4), (5, 5), (6, 6)$$

であるから、第 1 象限において直線 L 上にある格子点の個数が 3 個以上になる確率は、

$$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)

$\triangle ABC$ において余弦定理より、

$$1^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta - 1 = 0$$

(2)

$f(y) = y^2 - (2x \cos \theta)y + x^2 - 1$ とおく。①を y に関する2次方程式 $f(y) = 0$ とみたとき、それが、正の実数解をもつような正の実数 x の条件を考える。2次関数 $z = f(y)$ の軸は

$$y = x \cos \theta > 0 \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

であるから、正の実数解をもつには、方程式 $f(y) = 0$ の判別式 D が0以上であればよく、

$$\frac{D}{4} = (x \cos \theta)^2 - (x^2 - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$\therefore 0 < x \leq \frac{1}{\sin \theta}$$

となるので、 x の取りうる最大の値は $x = \frac{1}{\sin \theta}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{\sin \theta}$$

(3)

$$S = \frac{1}{2} xy \sin \theta$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{2} xy \sin \theta$$

(4)

相加相乗平均により、

$$S = \frac{1}{2} xy \sin \theta \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} \cdot \sin \theta$$

が成り立つ。ここに等号は、 $x = y$ のとき成立し、このとき、①より、

$$x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \theta - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2(1 - \cos \theta)} = \frac{1}{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$$

と求まる。したがって、求める最大値は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} x^2 \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{1}{4 \tan \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4 \tan \frac{\theta}{2}}$$

(5)

$L = 1 + x + y$ であるから、 $x + y$ の取りうる最大値を求めればよい。ここで、①より、

$$(x + y)^2 - 2xy - 2xy \cos \theta - 1 = 0$$

$$\therefore x + y = \sqrt{1 + 2xy(1 + \cos \theta)}$$

となるから、 $x + y$ が最大となるのは、 xy が最大となるときである。(4)より、それは、

$$x = y = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$$

で実現されるから、 L の取りうる最大値は、

$$L = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = 1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

【Ⅲ】

(1)

放物線 C と円 C_p が共有点を持つ条件は $y = x^2$ を $x^2 + (y-p)^2 = 1$ に代入した式 $y + (y-p)^2 = 1$ が

[1] 実数解を持つ

[2] その解のうち少なくとも 1 つは負で無い

の両方を満たすことである。まず [1] の条件について考える。このとき 2 次方程式

$$y + (y-p)^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 + (1-2p)y + (p^2-1) = 0 \text{ について判別式 } D \text{ は}$$

$$D = (1-2p)^2 - 4(p^2-1) \geq 0$$

をみたす。これを解くと $p \leq \frac{5}{4}$ となる。

次に [2] の条件について考える。 $y^2 + (1-2p)y + (p^2-1) = 0$ を解くと

$$y = \frac{2p-1 \pm \sqrt{D}}{2}$$

となる。 $\frac{2p-1+\sqrt{D}}{2} \geq \frac{2p-1-\sqrt{D}}{2}$ であるため $\frac{2p-1+\sqrt{D}}{2} \geq 0$ の条件のみを考えれば良い。

ここで、 $2p-1 \geq 0$ であれば明らかに正であるので、 $2p-1 < 0$ の場合を考える。

$$\frac{2p-1+\sqrt{D}}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5-4p} \geq 1-2p$$

$$\Leftrightarrow 5-4p \geq (1-2p)^2$$

$$\Leftrightarrow p^2 \leq 1$$

ここで、 $2p-1 < 0$ に注意すると

$$-1 \leq p < \frac{1}{2}$$

となる。また、 $2p-1 \geq 0$ の場合は条件 [2] をみたすので、 [1] の条件と合わせると求める条件は

$$-1 \leq p \leq \frac{5}{4}$$

となる。

(答) $-1 \leq p \leq \frac{5}{4}$

(2)

C, C_p が共有点をただ 1 つ持つ条件は、 $y^2 + (1-2p)y + (p^2-1) = 0$ の負でない解が $y=0$ のみ

であることである。この方程式が $y=0$ を解にもつとき、 $p = \pm 1$ となる。 $p=1$ とすると、

$$y^2 - y = 0 \quad \therefore y = 0, 1$$

となり、正の解をもつので不適である。 $p=-1$ とすると、

$$y^2 + 3y = 0 \quad \therefore y = 0, -3$$

となり、適する。よって、求める条件は $p=-1$ である。

(答) $p=-1$

(3)

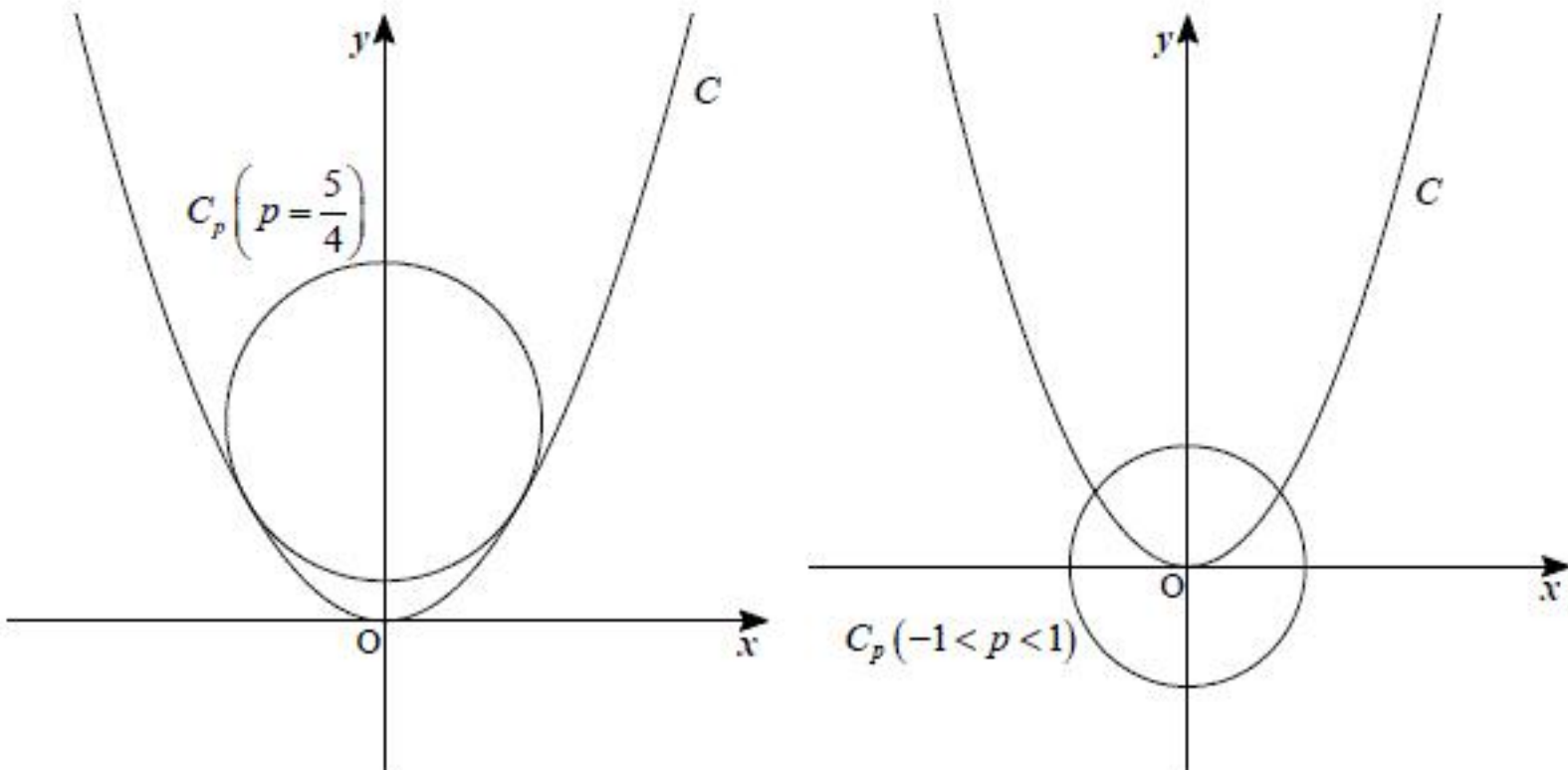
C, C_p が共有点を 2 つ持つ条件は $y^2 + (1-2p)y + (p^2-1) = 0$ が正の解を 1 つ、負の解を 1 つ持

つか正の重解をもつことである。即ち $f(p) = y^2 + (1-2p)y + (p^2-1)$ とおくと $f(0) < 0$ となる

か、 $D=0$ かつ $\frac{2p-1+\sqrt{D}}{2} > 0$ となればよい。これを解くと $-1 < p < 1, p = \frac{5}{4}$ となる。ここで、

下図のように、 $-1 < p < 1$ のときは C が C_p を 2 つの部分に分けるが、 $p = \frac{5}{4}$ のときは、 C が

C_p を 2 つの部分に分けないので、求める条件は $-1 < p < 1$ である。



(答) $-1 < p < 1$

(4)

C, C_p が共有点を 3 つ持つ条件は $y^2 + (1-2p)y + (p^2-1) = 0$ が正の解を 1 つ持ち、もう 1 つの

解が 0 であることである。即ち $f(0) = 0$ かつ $\frac{2p-1+\sqrt{D}}{2} > 0$ となればよい。これを解くと

$p=1$ となる。

(答) $p=1$

(5)

C, C_p が共有点を持つときその数は 1, 2, 3, 4 個のうちいずれかである。よって (1) の範囲から

(2), (3), (4) で求めた範囲を除くと共有点を 4 つ持つ範囲となる。よって、その範囲は

$$1 < p < \frac{5}{4}$$

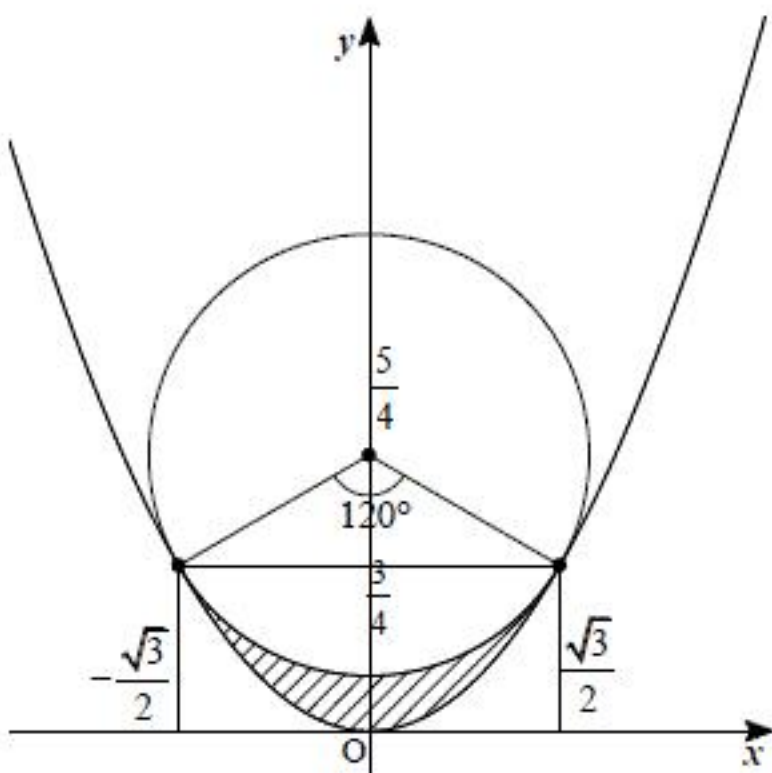
となる。

(答) $1 < p < \frac{5}{4}$

(6)

(3) より、求める条件は $p = \frac{5}{4}$ となる。また、このときの共有点の座標を計算すると $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4} \right)$

となる。よって、求める面積は下図の斜線部分の面積となる。



今求める面積を S とおくと、対称性により

$$\frac{S}{2} = \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 dx - \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore S = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$$

となる。

(答) $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$