

〔Ⅰ〕

〔解答〕

ア	$\frac{30}{13}$	イ	$-\frac{6}{13}$	ウ	-1	エ	2	オ	1
カ	3021	キ	5	ク	2	ケ	$\frac{1}{4}$	コ	$\frac{117}{80}$

〔解説〕

(1)

$f(x) = Ax + B$ を $f(x) = 3x - 1 + \int_0^1 (t-x)f(t)dt$ の積分内に代入して

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - 1 + \int_0^1 (t-x)(At+B)dt \\ &= 3x - 1 + \int_0^1 \{At^2 + (B-Ax)t - Bx\}dt \\ &= 3x - 1 + \left[\frac{1}{3}At^3 + \frac{1}{2}(B-Ax)t^2 - Bxt \right]_0^1 \\ &= \left(3 - \frac{A}{2} - B \right)x + \left(-1 + \frac{1}{3}A + \frac{1}{2}B \right) \end{aligned}$$

となる。これと、 $f(x) = Ax + B$ の係数を比較すると

$$\begin{cases} A = 3 - \frac{A}{2} - B \\ B = -1 + \frac{1}{3}A + \frac{1}{2}B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{30}{13} \\ B = -\frac{6}{13} \end{cases}$$

とわかる。

(2)

$a_{n+1} = (-1)^n a_n + 3$ に $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ を代入すると

$$\begin{aligned} a_2 &= (-1)^1 a_1 + 3 \\ &= 1 \\ a_3 &= (-1)^2 a_2 + 3 \\ &= 4 \\ a_4 &= (-1)^3 a_3 + 3 \\ &= -1 \\ a_5 &= (-1)^4 a_4 + 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

が得られる。また、漸化式より、前の1項が決まると、次の項が定まるので、 $\{a_n\}$ は $2, 1, 4, -1$ を繰り返す周期4の数列であることがわかる。したがって、 $2014 = 503 \times 4 + 2$ より

$$\begin{aligned} a_{2014} &= a_2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。1周期の和は6で、503周期あるので

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2014} a_k &= 503 \times 6 + 2 + 1 \\ &= 3021 \end{aligned}$$

である。

(3)

X の底を2に変換すると

$$\begin{aligned} X &= \log_a b \\ &= \frac{\log_2 b}{\log_2 a} \end{aligned}$$

となる。また2, 4, 6, 8, 16, 32に関してそれぞれ底を2とした対数をとると1, 2, 3, 4, 5となる。

従って $X = \frac{\log_2 b}{\log_2 a}$ の最大値は分子が最小で、分母が最大するときであるので

$$\begin{aligned} X_{\max} &= \frac{5}{1} \\ &= 5 \end{aligned}$$

である。 $X = 2$ となるのは、

$$(\log_2 a, \log_2 b) = (1, 2), (2, 4)$$

の2通りである。また X が整数となるのは

$$(\log_2 a, \log_2 b) = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4)$$

の5通りであり、全体の場合の数は $5 \times 4 = 20$ 通りである。従って、求める確率は

$$\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

である。 X の値の期待値は

$$\frac{1}{20} \left\{ \frac{2+3+4+5}{1} + \frac{1+3+4+5}{2} + \frac{1+2+4+5}{3} + \frac{1+2+3+5}{4} + \frac{1+2+3+4}{5} \right\} = \frac{117}{80}$$

と求められる。

〔Ⅱ〕

(1)

問題文より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{PA}} &= \overrightarrow{\text{OA}} - \overrightarrow{\text{OP}} \\ &= \begin{pmatrix} -1-t \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{\text{PB}} &= \overrightarrow{\text{OB}} - \overrightarrow{\text{OP}} \\ &= \begin{pmatrix} 2-t \\ 4-t^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。したがって内積は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{PA}} \cdot \overrightarrow{\text{PB}} &= (-1-t)(2-t) + (1-t^2)(4-t^2) \\ &= -(1+t)(2-t) + (1-t)(1+t)(2-t)(2+t) \\ &= (1+t)(2-t)(1-t-t^2)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{\text{PA}} \cdot \overrightarrow{\text{PB}} = (1+t)(2-t)(1-t-t^2)$$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\text{PA}}| &= \sqrt{(-1-t)^2 + (1-t^2)^2} \\ &= (1+t)\sqrt{2-2t+t^2} \\ |\overrightarrow{\text{PB}}| &= \sqrt{(2-t)^2 + (4-t^2)^2} \\ &= (2-t)\sqrt{5+4t+t^2}\end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{\text{PA}} \cdot \overrightarrow{\text{PB}} = |\overrightarrow{\text{PA}}| |\overrightarrow{\text{PB}}| \cos \theta$ なので

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overrightarrow{\text{PA}} \cdot \overrightarrow{\text{PB}}}{|\overrightarrow{\text{PA}}| |\overrightarrow{\text{PB}}|} \\ &= \frac{(1+t)(2-t)(1-t-t^2)}{(1+t)\sqrt{2-2t+t^2} (2-t)\sqrt{5+4t+t^2}} \\ &= \frac{1-t-t^2}{\sqrt{2-2t+t^2} \sqrt{5+4t+t^2}}\end{aligned}$$

となる。また、 $\frac{1}{\tan \theta}$ を求めるために $\sin \theta$ を求める。 $\sin^2 \theta$ は

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta \\ &= \frac{9}{(2-2t+t^2)(5+4t+t^2)}\end{aligned}$$

であるが、ここで $0 < \theta < \pi$ より $\sin \theta > 0$ なので

$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{2-2t+t^2} \sqrt{5+4t+t^2}}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1-t-t^2}{3}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{aligned}\cos \theta &= \frac{1-t-t^2}{\sqrt{2-2t+t^2} \sqrt{5+4t+t^2}} \\ \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{1-t-t^2}{3}\end{aligned}$$

(3)

$\angle \text{APB}$ が最小となるのは、 θ が最小になるときであり、 $\tan \theta$ が 0 以上で最小になるときである。つまり、 $\frac{1}{\tan \theta}$ が最大になれば良い。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan \theta} &= \frac{1-t-t^2}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{12}\end{aligned}$$

であることから、 $-1 < t < 2$ において、 $\frac{1}{\tan \theta}$ は $t = -\frac{1}{2}$ で最大となる。

$$(\text{答}) \quad t = -\frac{1}{2}$$

【Ⅲ】

(1)

倍角公式を用いると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x + a \sin 2x \\ &= \sin x + 2a \sin x \cos x \\ &= \sin x (1 + 2a \cos x) \end{aligned}$$

となる。 a がどのような値であっても、 $x=0, \pi$ のときは $f(x)=0$ より $f(x) \geq 0$ が成り立つ。

よって、

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \pi &\text{においてつねに } f(x) \geq 0 \text{ が成り立つ} \\ \Leftrightarrow 0 < x < \pi &\text{においてつねに } f(x) \geq 0 \text{ が成り立つ} \\ \Leftrightarrow 0 < x < \pi &\text{においてつねに } \sin x (1 + 2a \cos x) \geq 0 \text{ が成り立つ} \\ \Leftrightarrow 0 < x < \pi &\text{においてつねに } 1 + 2a \cos x \geq 0 \text{ が成り立つ } (\because \sin x > 0) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。①をみたすような a の値の範囲を求めればよい。以下 a の正負によって場合分けを行う。

[1] $a=0$ のとき

$$1 + 2a \cos x = 1 \geq 0 \text{ がつねに成り立つから、} a=0 \text{ は} \textcircled{1} \text{ をみたす。}$$

[2] $a>0$ のとき

$$0 < x < \pi \text{において、} \cos x \text{のとりうる値の範囲は } -1 < \cos x < 1 \text{ であるから、} 1 + 2a \cos x \text{ の}$$

$$\text{とりうる値の範囲は、}$$

$$1 - 2a < 1 + 2a \cos x < 1 + 2a$$

$$\text{である。よって、} \textcircled{1} \text{がみたされるための} a \text{の条件は、}$$

$$1 - 2a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{となる。} a > 0 \text{ と合わせて、} 0 < a \leq \frac{1}{2} \text{ となる。}$$

[3] $a<0$ のとき

$$0 < x < \pi \text{において、} \cos x \text{のとりうる値の範囲は } -1 < \cos x < 1 \text{ であるから、} 1 + 2a \cos x \text{ の}$$

$$\text{とりうる値の範囲は、}$$

$$1 + 2a < 1 + 2a \cos x < 1 - 2a$$

$$\text{である。よって、} \textcircled{1} \text{がみたされるための} a \text{の条件は、}$$

$$1 + 2a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{となる。} a < 0 \text{ と合わせて、} -\frac{1}{2} \leq a < 0 \text{ となる。}$$

以上[1], [2], [3]より、求める a の範囲は、

$$-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$$

である。

$$\text{(答)} \quad -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$$

(2)

円 S の方程式は

$$b^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

と変形できるので、点 $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ での接線は

$$\left(\frac{2}{5} - 0\right)(b - 0) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)\left(c - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{4}{3}b - \frac{1}{3}$$

とわかる。

$$\text{(答)} \quad c = \frac{4}{3}b - \frac{1}{3}$$

(3)

倍角、3倍角公式を用いると

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin x + 4b \sin x \cos x + c(3 \sin x - 4 \sin^3 x) \\ &= \sin x \{4c \cos^2 x + 4b \cos x + (1 - c)\} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $t = \cos x$ とおき、

$$h(t) = 4ct^2 + 4bt + (1 - c)$$

とおくと、(1)と同様に $\sin x \geq 0$ であるから、

$$-1 \leq t \leq 1 \text{において、} h(t) \geq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

になれば良い。 $c > 0$ に注意し、 $h(t)$ を平方完成すると

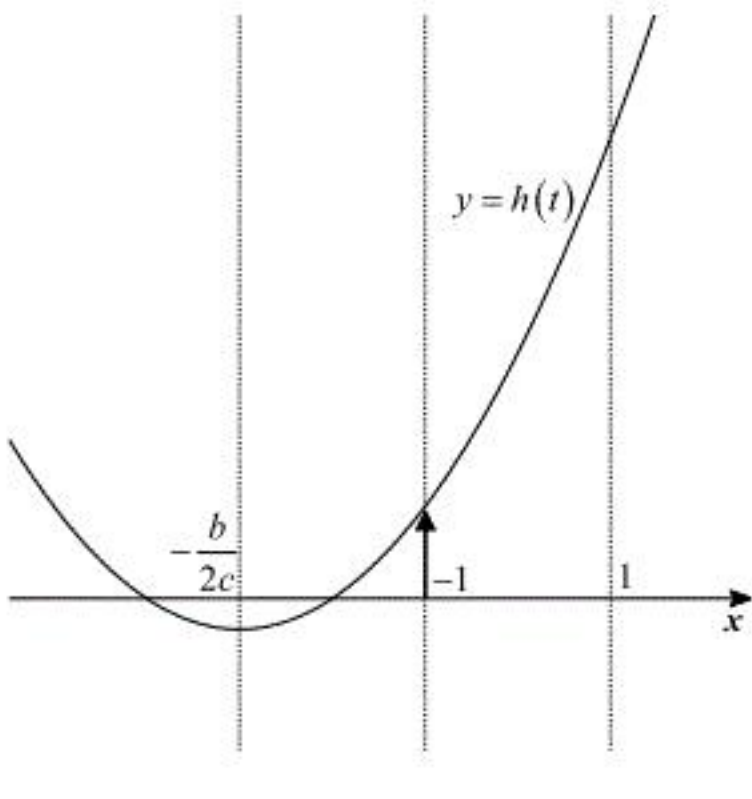
$$h(t) = 4c \left(t + \frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{1}{c}(b^2 + c^2 - c)$$

$$\text{となる。いま、} b > 2c \Leftrightarrow -\frac{b}{2c} < -1 \text{ であるから、} y = h(t) \text{の軸} t = -\frac{b}{2c} < -1 \text{ であることに注意す}$$

れば、①であることは

$$h(-1) \geq 0 \Leftrightarrow 3c - 4b + 1 \geq 0$$

と同値である。

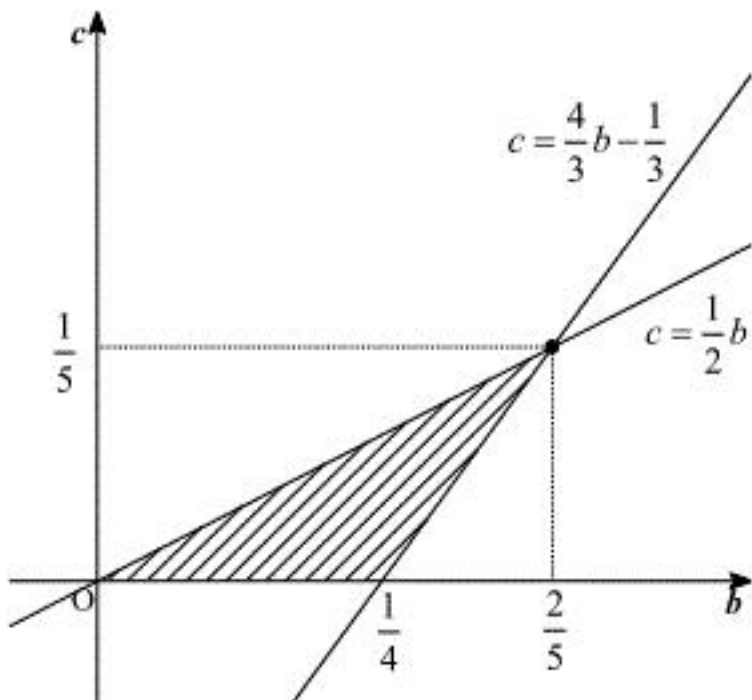


以上より、条件を満たす (b, c) は

$$0 < c < \frac{1}{2}b \quad \text{かつ} \quad c \geq \frac{4}{3}b - \frac{1}{3}$$

を満たし、これを図示すると、以下のようになる。ただし、境界は軸及び $c = \frac{1}{2}b$ 上は含まず、

それ以外は含む。



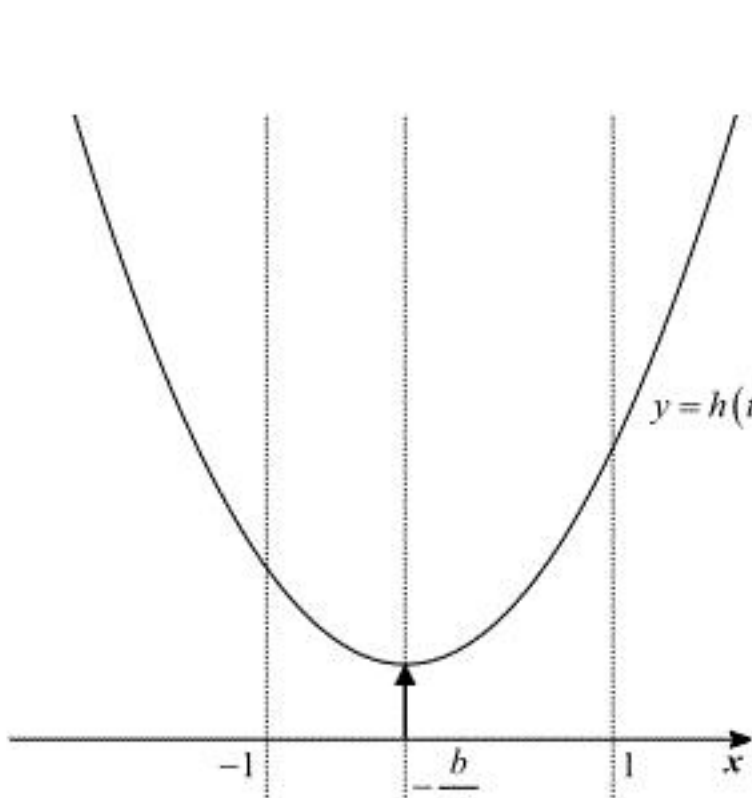
(答) 前図

(4)

$b \leq 2c$ の場合を考える。このとき、 $-1 \leq -\frac{b}{2c} < 0$ であるから、(3)より、①であることは、

$$(\text{頂点の} y \text{座標}) = -\frac{1}{c}(b^2 + c^2 - c) \geq 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - c \leq 0 \quad (\because c > 0)$$

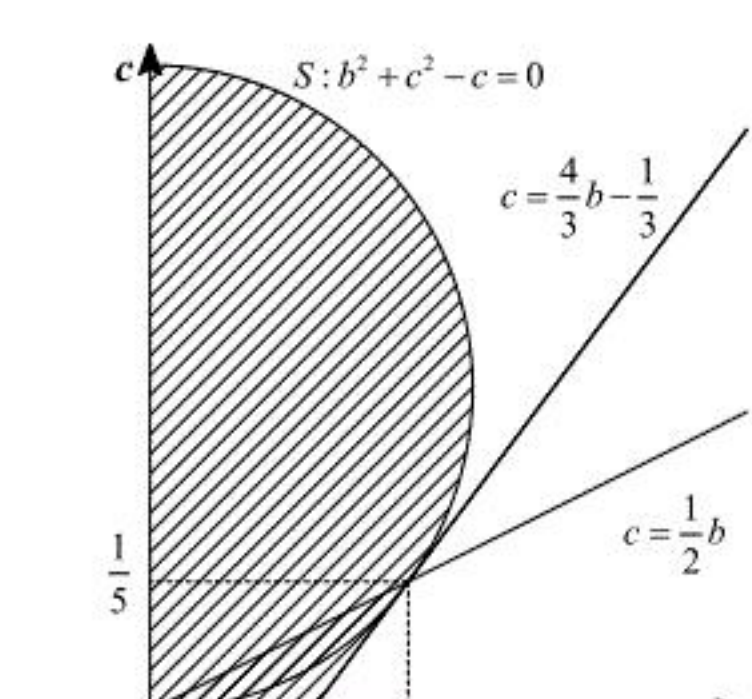
と同値である。



以上より、条件を満たす (b, c) は

$$0 < \frac{1}{2}b < c \quad \text{かつ} \quad b^2 + c^2 - c \geq 0$$

となり、(2)の結果と、(3)で求めた領域との和集合を考えることにより、求める領域は、下図の斜線部となる。ただし、境界は、 x, y 両軸は含まず、それ以外は含むものとする。



(答) 前図