

【Ⅰ】

【解答】

- ア イ ウ エ オ
- (1) $\frac{2}{3}a$ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $e^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{3}$ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- カ キ ク ケ コ
- (2) 3 2 $3(4^n-1)$ 4 $6(4^n-1)$

【解説】

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= x^3 - ax^2 + a \text{ より} \\ f'(x) &= 3x^2 - 2ax \\ &= x(3x - 2a) \end{aligned}$$

となり、 $a > 0$ であるから $x = 0$ で極大値、 $x = \frac{2}{3}a$ で極小値を取る。また、

$f(0) = a > 0$
 であるから、 $f(x)$ の極大値は 0 より大きいので、 $f(x)$ がただ一つの実数解を持つ条件は、
 極小値が 0 より大きいことである。よって

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}a\right) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{27}a^3 - a &< 0 \\ \Leftrightarrow a\left(a + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(a - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) &< 0 \\ \therefore (0 <) a &< \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

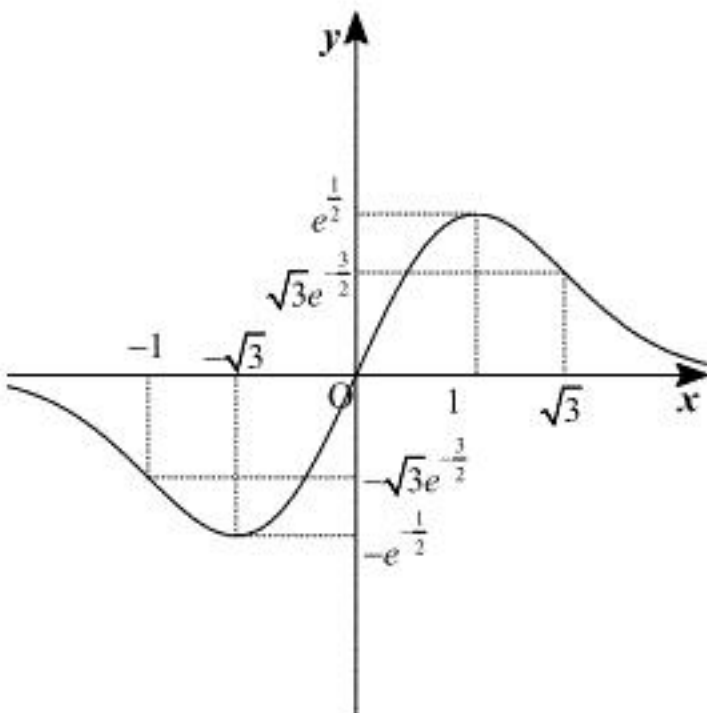
となる。次に、 $g(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$ について、

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1-x)(1+x)e^{\frac{x^2}{2}} \\ g''(x) &= x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})e^{\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

となるので、 $g(x)$ の増減表は下の通り。

x	...	$-\sqrt{3}$	...	-1	...	0	...	1	...	$\sqrt{3}$	...
$g'(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$g''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	$-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	$-e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\searrow$	$\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$

よって $y = g(x)$ のグラフは下のようになる。



$x < 0$ において、常に $g(x) < 0$ であるから、 $g(x)$ の最大値は $x = 1$ のときの $e^{\frac{1}{2}}$ であり、

$y = g(x)$ の第 1 象限にある変曲点の x 座標は $\sqrt{3}$ である。 $y = g(x)$ 上の点 $(t, g(t))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= g'(t)(x-t) + g(t) \\ \Leftrightarrow y &= (1-t^2)e^{\frac{t^2}{2}}(x-t) + te^{\frac{t^2}{2}} \\ &= (1-t^2)e^{\frac{t^2}{2}}x + t^3e^{\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

であり、これが点 $(p, 0)$ を通るとき

$$\begin{aligned} (1-t^2)e^{\frac{t^2}{2}}p + t^3e^{\frac{t^2}{2}} &= 0 \\ \Leftrightarrow t^3 - pt^2 + p &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。点 $(p, 0)$ から曲線 $y = g(x)$ への接線がただ一つ引ける条件は、 $\textcircled{1}$ 式を t についての方程式と見たときただ一つの実数解を持つことである。 $\textcircled{1}$ 式の左辺は $a = p$ としたときの $f(t)$ に等しいので、 $f(t) = 0$ がただ一つの実数解を持つ条件を求めればよい。これは $\boxed{\text{イ}}$ で求めた通り、

$$p < \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

である。

- (2) $a_n = a_1 r^{n-1}$ と書けるので、これに $n = 2, 5$ を代入して、

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_2 = a_1 r = 6 \\ a_5 = a_1 r^4 = 48 \end{cases} \\ \Rightarrow 6r^3 = 48 \\ \Leftrightarrow r = 2 (\because r > 0) \\ \therefore (a_1, r) = (3, 2) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

であるから

$$a_n^2 = 9 \cdot 4^{n-1}$$

となるので

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 &= \sum_{k=1}^n 9 \cdot 4^{k-1} \\ &= \frac{9(4^n - 1)}{4 - 1} \\ &= 3(4^n - 1) \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} b_n &= a_n a_{n+1} \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} \cdot 3 \cdot 2^n \\ &= 9 \cdot 2^{2n-1} \\ &= 18 \cdot 4^{n-1} \end{aligned}$$

となるので、 b_n は公比 4 の等比数列となり

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n &= \sum_{k=1}^n 18 \cdot 4^{k-1} \\ &= \frac{18(4^n - 1)}{4 - 1} \\ &= 6(4^n - 1) \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)

$$\begin{aligned}A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2 \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5}n & 1 \end{pmatrix} \text{ となることを数学的帰納法で証明する。}$$

[1] $n=1$ のとき

与えられた A, B の定義式より正しいことがわかる。

[2] $n=k$ で成り立つと仮定して、 $n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}A^{k+1} &= A^k \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + \frac{1}{2}k \cdot 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B^{k+1} &= B^k \cdot B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5}k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{5} & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ \frac{1}{5}k \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{5} & \frac{1}{5}k \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5}(k+1) & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので、 $k+1$ のときも成り立つ。

以上, [1], [2] より,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5}n & 1 \end{pmatrix}$$

となることが示された。

$$(答) \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5}n & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{aligned}P_n &= A^n P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_n &= B^n Q \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5}n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 \\ 2n-5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad P_n(n, 2), Q_n(10, 2n-5)$$

(4)

$P_n(n, 2), Q_n(10, 2n-5)$ であるから求める面積は

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2} |n(2n-5) - 2 \cdot 10| \\ &= \frac{1}{2} |2n^2 - 5n - 20|\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad S_n = \frac{1}{2} |2n^2 - 5n - 20|$$

(5)

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^2 - 5x - 20 \text{ とすると} \\ f(0) &= -20 < 0\end{aligned}$$

であるから、 $f(x)=0$ は正と負の解を一つずつ持つ。また、 $y=f(x)$ の軸は $x=\frac{5}{4}$ であり、

$$\begin{aligned}f(4) &= -8 < 0 \\ f(5) &= 5 > 0\end{aligned}$$

であるから、 $S_n = \frac{1}{2} |f(n)|$ は $n=1, 4, 5$ のいずれかで最小値を取る。ここで

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{23}{2} \\ S_4 &= 4 \\ S_5 &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

であるから、 S_n は $n=5$ のとき最小値 $\frac{5}{2}$ をとる。

$$(答) \quad \frac{5}{2}, \quad n=5 \text{ のとき}$$

〔Ⅲ〕

(1)

$0 \leq t \leq \pi$ より $0 \leq 3t \leq 3\pi$ であるから、 $x = \sin(3t)$ は $3t = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi$ 、すなわち $t = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ で最大値1を取る。このとき、それぞれの t について、

$$y = \sin(2t) = \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。また、 $x = \sin(3t)$ は $3t = \frac{3}{2}\pi$ 、すなわち $t = \frac{1}{2}\pi$ で最小値-1を取る。このとき、

$$y = \sin(2t) = 0$$

となる。

(答) x 座標が最大となる点: $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 x 座標が最小となる点: $(-1, 0)$

(2)

$0 \leq t \leq \pi$ に気を付けると

$$x = \sin(3t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 3t = \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$
$$\therefore t = \frac{5}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi$$

となるから、このとき

$$y = \sin(2t) = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

となる。よって直線 $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ と曲線 C の交点は $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ である。

同様に

$$x = \sin(3t) = 0 \Leftrightarrow 3t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$$
$$\therefore t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi$$

となるから

$$y = \sin(2t) = 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0$$

となる。よって直線 $x = 0$ と曲線 C の交点は $(0, 0), \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ となる。

最後に、

$$x = \sin(3t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 3t = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi$$
$$\therefore t = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{11}{12}\pi$$

となるから

$$y = \sin(2t) = \frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}$$

となるので、直線 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ と曲線 C の交点は $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ となる。

$$\text{曲線 } C \text{ と直線 } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ の交点: } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$

(答) 曲線 C と直線 $x = 0$ の交点: $(0, 0), \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\text{曲線 } C \text{ と直線 } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ の交点: } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$

(3)

曲線 C 上の点 $(\sin 3t_0, \sin 2t_0)$ に対して $t = \pi - t_0$ に対応する点の座標は

$$\begin{pmatrix} \sin\{3(\pi - t_0)\} \\ \sin\{2(\pi - t_0)\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(3\pi - 3t_0) \\ \sin(2\pi - 2t_0) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \sin 3t_0 \\ -\sin 2t_0 \end{pmatrix}$$

となり、これら2点は x 軸に関して対称である。 $0 \leq t \leq \pi$ であるから常に $t = \pi - t_0$ なる点が C 上に存在するので、曲線 C は x 軸に関して対称であることが示された。

(証明終)

(4)

$x = \sin(3t), y = \sin(2t)$ より

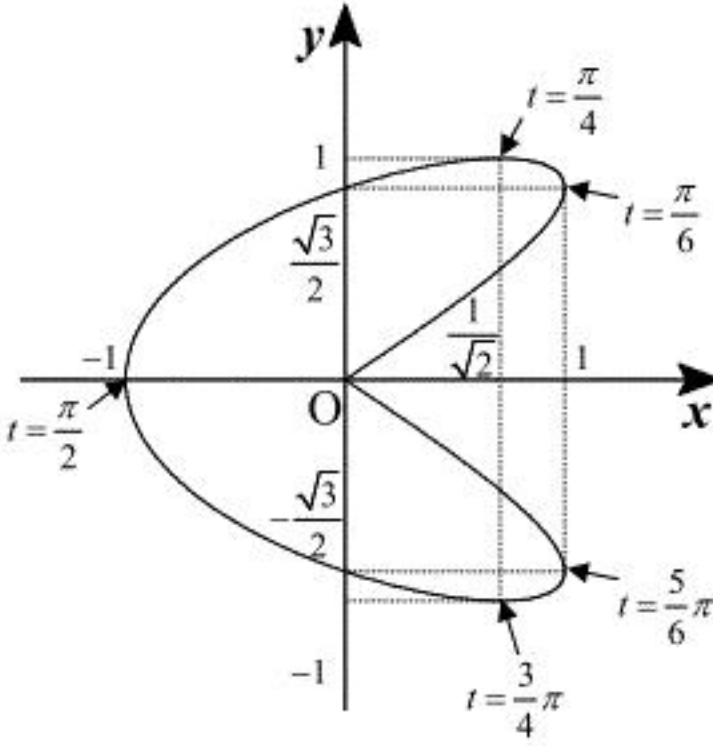
$$x' = 3\cos 3t$$

$$y' = 2\cos 2t$$

であるので、増減表は下の通り。

t	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π
x'	×	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	×
x	0		1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		-1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		0
y'	×	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	×
y	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1		0		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		0

よって、(1), (2)の(答)にも注意すると、以下のグラフが描ける。



(答) 前図

(5)

(3)より、曲線 C は x 軸に関して対称であるから、曲線 C が囲む面積は、曲線 C の $y \geq 0$ の部分と x 軸が囲む面積の2倍に等しい。

区間 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ におけるグラフを $y = f_-(x)$,

区間 $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ におけるグラフを $y = f_+(x)$

とおけば、求める面積は

$$\begin{aligned} 2\left\{\int_{-1}^1 f_+(x)dx - \int_0^1 f_-(x)dx\right\} &= 2\left\{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(2t) \frac{dx}{dt} dt - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(2t) \frac{dx}{dt} dt\right\} \\ &= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin(2t) \cdot 3\cos(3t) dt \\ &= 6\int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\sin t \cos t (4\cos^3 t - 3\cos t) dt \\ &= 12\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (4\cos^4 t - 3\cos^2 t) (-\cos t)' dt \\ &= 12\left[\frac{4}{5}\cos^5 t - \cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{12}{5} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{12}{5}$

〔Ⅳ〕

(1)

$$f(x)=\log(1+x)+\frac{x^2}{2}-x$$

とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} + x - 1 \\ &= \frac{x^2}{1+x} \end{aligned}$$

となるので $x > 0$ で $f'(x) > 0$ となり、 $f(x)$ は $x > 0$ で単調増加となる。また、 $f(0) = 0$ であるから、 $x > 0$ で $f(x) > 0$ となり

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$$

が示された。次に

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log(1+x)$$

とおくと

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{x^3}{1+x} \end{aligned}$$

となる。よって $x > 0$ で $g'(x) > 0$ となり、 $g(x)$ は $x > 0$ で単調増加となる。また、 $g(0) = 0$ であるから $x > 0$ で $g(x) > 0$ となり、

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が示された。以上のことから

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が示された。

(証明終)

(2)

(1)の不等式において $x = \frac{1}{n}$ として整理すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} &< \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} &< n\left(n\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right) < -\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right) = -\frac{1}{2}$$

であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(n\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right) = -\frac{1}{2}$$

となる。

(答) $-\frac{1}{2}$

(3)

$h(t) = e^t$ とすると $h'(t) = e^t$ であるから $h'(0) = 1$ 。また、微分の定義より

$$\begin{aligned} h'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(0)}{t - 0} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \end{aligned}$$

となるので

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

となる。

(答) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

(4)

$-\frac{1}{2n} = t$ とおくと、(3)より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(e^{\frac{1}{2n}} - 1\right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{e^t - 1}{t}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。 $i(t) = e^{\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2}}$ とおくと、

$$i'(t) = \left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{2}\right)e^{\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2}}$$

であるから、 $i'(0) = -\frac{1}{2}$ となる。ここで微分の定義から

$$\begin{aligned} i'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{i(t) - i(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2}} - 1}{t} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2}} - 1}{t} = -\frac{1}{2}$$

を得る。この式において $t = \frac{1}{n}$ とすれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(e^{\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2}} - 1\right) = -\frac{1}{2}$$

を得る。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(e^{\frac{1}{2n}} - 1\right) = -\frac{1}{2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(e^{\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2}} - 1\right) = -\frac{1}{2}$

(5)

(1)より $x = \frac{1}{n}$ とすれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} &< \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2n} &< n\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 < -\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} \\ \Leftrightarrow n\left(e^{\frac{1}{2n}} - 1\right) &< n\left(e^{n\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} - 1\right) < n\left(e^{\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}} - 1\right) \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を得る。ここで中辺を整理すると

$$\begin{aligned} n\left(e^{n\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} - 1\right) &= \frac{1}{e} \cdot n\left(e^{n\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - e\right) \\ &= \frac{1}{e} \cdot n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right) \end{aligned}$$

となる。(4)と①式からはさみうちの原理より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \cdot n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right) &= -\frac{1}{2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right) &= -\frac{e}{2} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right) = -\frac{e}{2}$