

【I】

〔解答〕

$$\text{ア. } 5 \qquad \text{イ. } \frac{1}{3}(4^n - 1) \quad \text{ウ. } 0 \quad \text{エ. } 0 \quad \text{オ. } 1$$

$$\text{カ. } \frac{1}{45}(4^{2n+1} - 15n - 4) \quad \text{キ. } 8 \qquad \text{ク. } 0 \quad \text{ケ. } 3 \quad \text{コ. } 2$$

〔解説〕

(1)

数列 $\{a_n\}$ が、漸化式

$$\begin{cases} a_1 = 1 & \dots \textcircled{1} \\ a_{n+1} = 4a_n + 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

で与えられているとき、①、②より

$$\begin{aligned} a_2 &= 4 \cdot 1 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

であり、②を変形すると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \frac{1}{3} &= 4 \left(a_n + \frac{1}{3} \right) \\ \therefore a_n + \frac{1}{3} &= 4^{n-1} \left(a_1 + \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

となるから、①より、一般項は

$$a_n = \frac{1}{3}(4^n - 1) \qquad \dots \textcircled{3}$$

となる。また、③より、 $a_{n+2} - a_n$ を計算すると、

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_n &= \frac{1}{3}(4^{n+2} - 4^n) \\ &= 5 \cdot 4^n \end{aligned}$$

となるから、これを5で割った余りは0である。さらに、 a_n を5で割った余りを b_n とすると、直前の結果より

$$b_{n+2} = b_n$$

となることがわかるから、 $a_1 = 1, a_2 = 5$ より、

$$\begin{aligned} b_4 &= b_2 = 0 \\ b_5 &= b_3 = b_1 = 1 \end{aligned}$$

となる。 k を自然数としたとき、同様にして

$$\begin{cases} b_{2k-1} = 1 \\ b_{2k} = 0 \end{cases}$$

となることがわかるから、求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} a_k b_k &= \sum_{m=1}^n a_{2m-1} \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{1}{3}(4^{2m-1} - 1) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{4 - 4^{2n+1}}{1 - 4^2} - n \right) \\ &= \frac{1}{45}(4^{2n+1} - 15n - 4) \end{aligned}$$

である。

(2)

題意で与えられた1次変換 f を表す行列を F とすると、線形性を利用して、

$$\begin{aligned} F \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \therefore F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \therefore F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

となるから、④、⑤より、

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であることがわかる。よって、 f による点 $D(3, 2)$ の像は

$$\begin{aligned} F \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、点 $(8, 0)$ であることがわかり、 f による点 $P \left(t, -\frac{1}{2}t^2 + 1 \right)$ の像は

$$\begin{aligned} F \begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{2}t^2 + 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{2}t^2 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 + 2t + 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、点 $\left(-\frac{1}{2}t^2 + 2t + 1, 0 \right)$ となることがわかる。ここで、点 Q の x 座標は

$$-\frac{1}{2}t^2 + 2t + 1 = -\frac{1}{2}(t - 2)^2 + 3$$

と変形できるから、 $0 \leq t \leq 4$ の範囲では、 $t = 2$ のときに最大値3をとることがわかる。また、

このときの点 $P \left(t, -\frac{1}{2}t^2 + 1 \right)$ の x 座標は、 $t = 2$ を代入することで、2であることがわかる。

〔Ⅱ〕

(1)

条件より

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ b-a \\ a-b \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} b-a \\ 0 \\ a-b \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} b-a \\ a-b \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。よって、

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}(b-a) \quad (\because b > a)$$

となり、 $\triangle ABC$ は一片の大きさ $\sqrt{2}(b-a)$ の正三角形となるので、その面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}(b-a) \cdot \left\{ \sqrt{2}(b-a) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}(b-a)^2$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{3}}{2}(b-a)^2$$

(2)

点 A, B, C の重心 G の座標は $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2a+b \\ 2a+b \end{pmatrix}$ である。また、

$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

となるので、原点から $\triangle ABC$ におろした垂線の足は点 G である。以上より四面体 OABC の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(b-a)^2 \cdot |\overrightarrow{OG}| \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(b-a)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}(2a+b) \\ &= \frac{1}{6}(b-a)^2(2a+b) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{6}(b-a)^2(2a+b)$$

(3)

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{2a^2 + b^2}$$

であり、

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}(b-a)$$

であるので、

$$\begin{aligned} \sqrt{2a^2 + b^2} &= \sqrt{2}(b-a) \\ \Leftrightarrow \sqrt{2a^2 + b^2} &= \sqrt{2(b^2 - 2ba + a^2)} \\ \Leftrightarrow b &= 4a \end{aligned}$$

となるとき、四面体 OABC は正四面体となる。

$$(\text{答}) \quad b = 4a$$

(4)

(3)の条件を満たす最小の自然数 a, b は $a=1, b=4$ である。このとき、(1), (2)より

$$S = \frac{9\sqrt{3}}{2}, V = 9$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a=1, b=4, S = \frac{9\sqrt{3}}{2}, V = 9$$

【III】

(1)

点 $P(a, 0)$ と直線 $y = x - 2 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0$ の距離が、円の半径である 1 に等しければよいので、

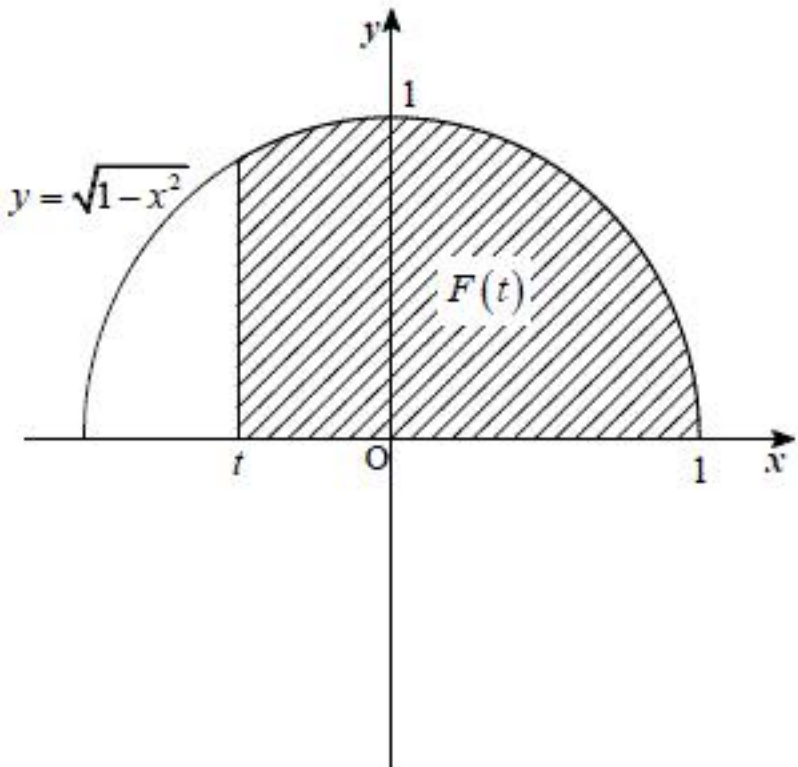
$$\frac{|a - 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 1 \Leftrightarrow |a - 2| = \sqrt{2}$$

$$\therefore a = 2 \pm \sqrt{2}$$

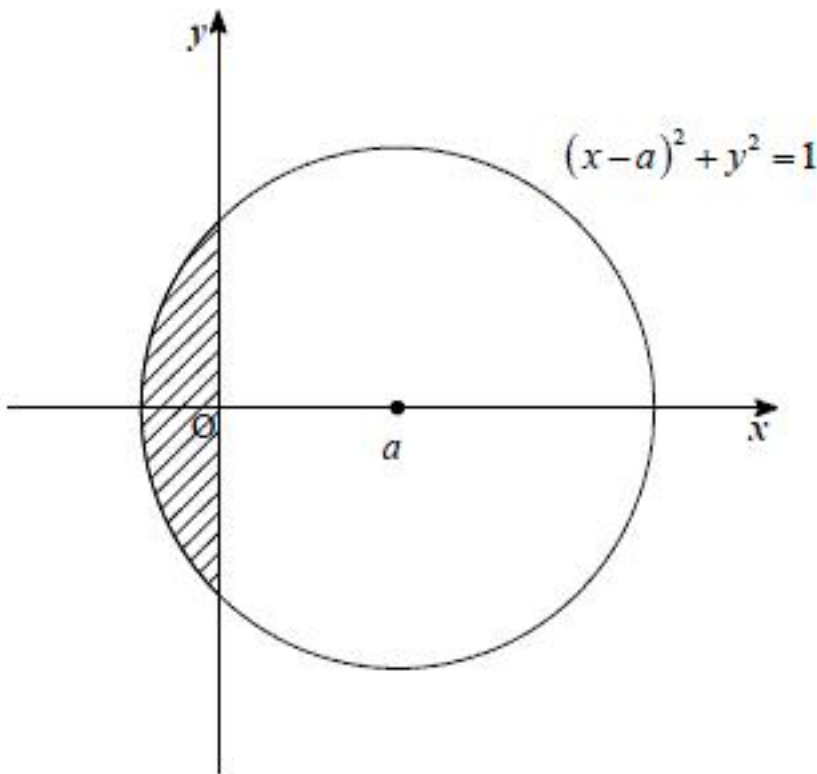
である。

(答) $a = 2 \pm \sqrt{2}$

(2)



$F(t) = \int_t^1 \sqrt{1-x^2} dx$ は上図の斜線部の面積を表す。一方、 $0 \leq a < 1$ に対して、円 K の内部と領域 $x \leq 0$ の共通部分は以下ようになる。



円 K の内部と第 2 象限の共通部分の面積は、中心を平行移動して、 $s = a - x$ と置換積分して考えることにより、

$$\int_{a-1}^0 \sqrt{1-(x-a)^2} dx = \int_a^1 \sqrt{1-s^2} ds = F(a)$$

と表せることがわかるから、 x 軸に関する対称性に注意すると、求める面積は、

$$2F(a)$$

となる。

(答) $2F(a)$

(3)

円 K の内部と領域 D の共通部分の面積を $S(a)$ とおく。円 K が領域 D の境界である y 軸と $y = x - 2$ に接する $a = \pm 1$ と $a = 2 \pm \sqrt{2}$ を境にして場合分けをして考える。

[1] $a < -1$ のとき

$S(a) = 0$ である。

[2] $-1 \leq a < 2 - \sqrt{2}$ のとき

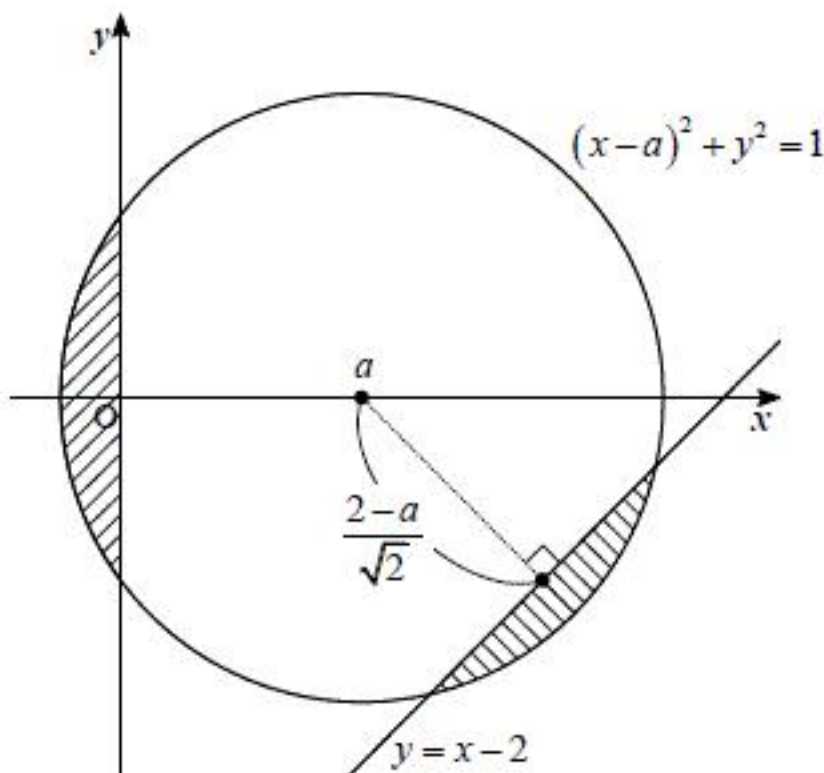
(2) で求めた面積が、領域 D に含まれない部分の面積だから、

$$S(a) = \pi - 2F(a)$$

となる。

[3] $2\sqrt{2} \leq a < 1$ のとき

領域 D に含まれない部分は下図の斜線部になる。



したがって、 P と $y = x - 2$ の距離が (1) より $\frac{2-a}{\sqrt{2}}$ であることに注意して、(2) と同様に考えると、

$$S(a) = \pi - 2F(a) - 2F\left(\frac{2-a}{\sqrt{2}}\right)$$

となる。

[4] $1 \leq a < 2 + \sqrt{2}$ のとき

領域 D に含まれない部分は $y \leq x - 2$ の部分だけになるので、[3] の議論から、

$$S(a) = \pi - 2F\left(\frac{2-a}{\sqrt{2}}\right)$$

となる。

[5] $2 + \sqrt{2} \leq a$ のとき

$S(a) = 0$ である。

以上、[1] から [5] より、 $S(a)$ について、

$a < 2 - \sqrt{2}$ においては単調増加、 $1 \leq a$ においては単調増加であることがわかるから、[3] における $S(a)$ の最大値を求めればよい。

$$S'(a) = -2(-\sqrt{1-a^2}) - 2\left\{-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{1-\left(\frac{2-a}{\sqrt{2}}\right)^2}\right\}$$

$$= 2\sqrt{1-a^2} - \sqrt{2-(2-a)^2}$$

$$= \frac{-3a^2 - 4a + 6}{2\sqrt{1-a^2} + \sqrt{2-(2-a)^2}}$$

となるので、 $2 - \sqrt{2} < a < 1$ において、 $S'(a) = 0$ の解は、 $a = \frac{-2 + \sqrt{22}}{3}$ となる。

$2\sqrt{1-a^2} + \sqrt{2-(2-a)^2} > 0$ であるから、以下の増減表が書ける。

a	$2 - \sqrt{2}$	$\dots$	$\frac{-2 + \sqrt{22}}{3}$	$\dots$	1
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって、 $a = \frac{-2 + \sqrt{22}}{3}$ のとき、 $S(a)$ は極大かつ最大となる。

(答) $a = \frac{-2 + \sqrt{22}}{3}$

〔Ⅳ〕

(1)

点 P の座標が一致する条件は

$$ax_0^2 = \log x_0 + \log t \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。

次に、接線が一致する条件を求める。 C_1 について

$$y' = \frac{1}{x}$$

となり、点 P での接線の方程式は

$$y = \frac{1}{x_0}(x - x_0) + ax_0^2$$

$$\therefore y = \frac{1}{x_0}x + ax_0^2 - 1$$

となる。また、 C_2 について

$$y' = 2ax$$

となり、点 P での接線の方程式は

$$y = 2ax_0(x - x_0) + ax_0^2$$

$$\therefore y = 2ax_0x - ax_0^2$$

となる。よって、これらが一致する条件は

$$2ax_0 = \frac{1}{x_0} \quad \text{かつ} \quad ax_0^2 - 1 = -ax_0^2$$

$$\therefore 2ax_0^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{cases} ax_0^2 = \log x_0 + \log t \\ 2ax_0^2 = 1 \end{cases}$$

(2)

②を①に代入して

$$2\log x_0 + 2\log t = 1$$

$$\therefore x_0 = \frac{\sqrt{e}}{t}$$

となり、これを②に代入して

$$a = \frac{t^2}{2e}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} x_0 = \frac{\sqrt{e}}{t} \\ a = \frac{t^2}{2e} \end{cases}$$

(3)

ℓ の方程式は

$$y = -x_0(x - x_0) + ax_0^2$$

$$\therefore y = -x_0x + ax_0^2 + x_0^2$$

となる。よって

$$Q(0, ax_0^2 + x_0^2), R(ax_0 + x_0, 0)$$

となる。これに(2)の結果を代入すると

$$Q\left(0, \frac{1}{2} + \frac{e}{t^2}\right), R\left(\frac{t}{2\sqrt{e}} + \frac{\sqrt{e}}{t}, 0\right)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{t^2}\right) \cdot \left(\frac{t}{2\sqrt{e}} + \frac{\sqrt{e}}{t}\right) \\ &= \frac{(t^2 + 2e)^2}{8\sqrt{e}t^3} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{1}{8\sqrt{e}} \left(1 - 4e \cdot \frac{1}{t^2} - 12e^2 \frac{1}{t^4}\right) \\ &= \frac{1}{8\sqrt{e}} \cdot \frac{(t - \sqrt{6e})(t + \sqrt{6e})(t^2 + 2e)}{t^4} \end{aligned}$$

であるので関数 $S(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\sqrt{6e}$	...
$S'(t)$	$\times$	-	0	+
$S(t)$	$\times$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、 $S(t)$ を最小とする t は $\sqrt{6e}$ であることが分かる。

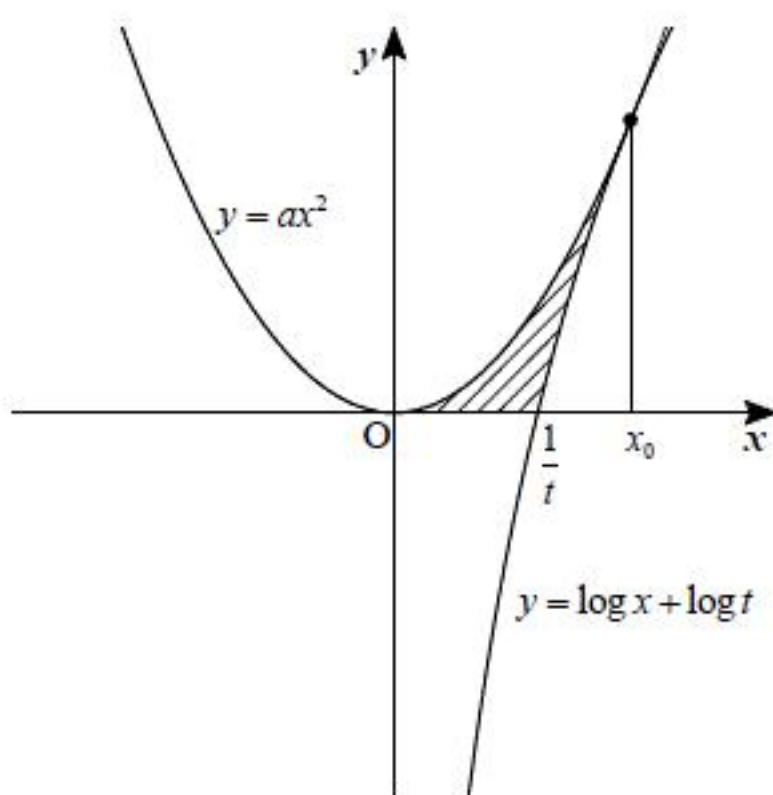
$$(\text{答}) S(t) = \frac{(t^2 + 2e)^2}{8\sqrt{e}t^3}, \quad S(t) \text{ を最小とする } t: \sqrt{6e}$$

(4)

$$\log x + \log t = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{t}$$

であるので、求める面積は下図の斜線部分となる。



その値は

$$\int_0^{x_0} ax^2 dx - \int_{\frac{1}{t}}^{x_0} (\log x + \log t) dx = \frac{ax_0^3}{3} - x_0 \log x_0 + x_0 + \frac{1}{t} \log \frac{1}{t} - \frac{1}{t} - x_0 \log t + \frac{1}{t} \log t$$

となり、今 $x_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $a = 3$ であるので

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} ax^2 dx - \int_{\frac{1}{t}}^{x_0} (\log x + \log t) dx &= \frac{1}{6\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \log \sqrt{6} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6e}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \log \sqrt{6e} \\ &= \frac{2\sqrt{6e} - 3\sqrt{6e}}{18e} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{2\sqrt{6e} - 3\sqrt{6e}}{18e}$$