

【Ⅰ】

【解答】

$$\begin{array}{llllll} \text{ア } 9 & \text{イ } 16 & \text{ウ } 5 & \text{エ } \frac{5}{81} & \text{オ } \frac{2i-1}{81} \\ \text{カ } \frac{175}{27} & \text{キ } j^k & \text{ク } j^k - (j-1)^k & \text{ケ } \frac{j^k - (j-1)^k}{9^k} & \text{コ } j^k \end{array}$$

【解説】

一連の操作を2回行うとき、 X が3以下となるのは、2回とも3以下の数字が書かれた球を取り出すときであるから、その場合の数は

$$3^2 = 9 \text{ 通り}$$

である。 X が4以下となる場合の数も同様にして、

$$4^2 = 16 \text{ 通り}$$

である。 X がちょうど3となる場合の数は、 X が3以下となる場合の数から X が2以下となる場合の数を減じたものに等しく、

$$9 - 2^2 = 5 \text{ 通り}$$

である。よって、 X が3と等しくなる確率は

$$\frac{5}{9^2} = \frac{5}{81}$$

である。同様に考えれば、 $i=1, 2, 3, \dots, 9$ に対し、 X が i と等しくなる確率は

$$\frac{i^2 - (i-1)^2}{9^2} = \frac{2i-1}{81}$$

となる。よって、 X の期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^9 i \cdot \frac{2i-1}{81} &= \frac{1}{81} \sum_{i=1}^9 (2i^2 - i) \\ &= \frac{1}{81} \left(2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot 10 \cdot 19 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \right) \\ &= \frac{175}{27} \end{aligned}$$

である。次に、一連の操作を k 回行うとき、 $j=1, 2, 3, \dots, 9$ に対し、 Y が j 以下となる場合の数は

$$j^k \text{ 通り}$$

で、 Y が j と等しくなる場合の数は

$$j^k - (j-1)^k \text{ 通り}$$

である。よって、 Y が j と等しくなる確率は

$$\frac{j^k - (j-1)^k}{9^k}$$

であるから、 Y の期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^9 j \cdot \frac{j^k - (j-1)^k}{9^k} &= \frac{1}{9^k} \{ 9 \cdot (9^k - 8^k) + 8 \cdot (8^k - 7^k) + \dots + 2 \cdot (2^k - 1^k) + 1^k \} \\ &= \frac{1}{9^k} \{ 9 \cdot 9^k + (8-9) \cdot 8^k + (7-8) \cdot 7^k + \dots + (2-3) \cdot 2^k + (1-2) \cdot 1^k \} \\ &= 9 - \frac{1}{9^k} \sum_{j=1}^8 j^k \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるから、

$$|\overline{AB}|^2 = 6, |\overline{AC}|^2 = 12, \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4$$

と計算できる。したがって、 $\triangle ABC$ の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{6 \cdot 12 - 4^2} \\ &= \sqrt{14}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\sqrt{14}$

(2)

点 H は平面 ABC 上にあるので、実数 s, t を用いて、

$$\begin{aligned}\overline{OH} &= \overline{OA} + s\overline{AB} + t\overline{AC} \\ &= (1-s-t)\overline{OA} + s\overline{OB} + t\overline{OC}\end{aligned}$$

と表せる。

$$\begin{aligned}|\overline{OA}| &= |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = 3 \\ \overline{OA} \cdot \overline{OB} &= 6, \overline{OB} \cdot \overline{OC} = 4, \overline{OC} \cdot \overline{OA} = 3\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overline{OH} \cdot \overline{AB} &= \{(1-s-t)\overline{OA} + s\overline{OB} + t\overline{OC}\} \cdot (\overline{OB} - \overline{OA}) \\ &= (1-s-t)\overline{OA} \cdot \overline{OB} + s|\overline{OB}|^2 + t\overline{OB} \cdot \overline{OC} \\ &\quad - (1-s-t)|\overline{OA}|^2 - s\overline{OA} \cdot \overline{OB} - t\overline{OA} \cdot \overline{OC} \\ &= 6s + 4t - 3 \\ \overline{OH} \cdot \overline{AC} &= \{(1-s-t)\overline{OA} + s\overline{OB} + t\overline{OC}\} \cdot (\overline{OC} - \overline{OA}) \\ &= (1-s-t)\overline{OA} \cdot \overline{OC} + s\overline{OB} \cdot \overline{OC} + t|\overline{OC}|^2 \\ &\quad - (1-s-t)|\overline{OA}|^2 - s\overline{OA} \cdot \overline{OB} - t\overline{OA} \cdot \overline{OC} \\ &= 2s + 6t - 3\end{aligned}$$

と計算できる。

$$\overline{OH} \perp \text{平面 ABC}$$

であるから、

$$\overline{OH} \cdot \overline{AB} = 0, \overline{OH} \cdot \overline{AC} = 0$$

となるので、

$$\begin{cases} 6s + 4t - 3 = 0 \\ 2s + 6t - 3 = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと、

$$(s, t) = \left(\frac{3}{14}, \frac{3}{7} \right)$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned}\overline{OH} &= \overline{OA} + \frac{3}{14}\overline{AB} + \frac{3}{7}\overline{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{14}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{27}{14} \\ \frac{9}{14} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $H\left(\frac{27}{14}, -\frac{9}{14}, \frac{9}{7}\right)$

(3)

点 P と平面 ABC の距離を h とすると、

$$V = S \cdot h \cdot \frac{1}{3}$$

と表せる。 S は一定であるから、 h が最大となるとき、 V は最大となる。 h は点 P と平面 ABC の距離なので、 h が最大になるのは、点 P が半直線 HO と球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ との交点にあるときである。このとき、点 P から平面 ABC に下ろした垂線の足は H であるので、

$$\begin{aligned}h &= |\overline{OH}| + 3 \\ &= \frac{1}{14} \sqrt{27^2 + (-9)^2 + 18^2} + 3 \\ &= \frac{9\sqrt{14}}{14} + 3\end{aligned}$$

であるから、 V の最大値は、

$$\begin{aligned}V &= \sqrt{14} \cdot \left(\frac{9\sqrt{14}}{14} + 3 \right) \cdot \frac{1}{3} \\ &= 3 + \sqrt{14}\end{aligned}$$

と求まる。このとき、点 P の座標は、

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= -3 \cdot \frac{\overline{OH}}{|\overline{OH}|} \\ &= -3 \cdot \frac{14}{9\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{27}{14} \\ \frac{9}{14} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{9}{14}\sqrt{14} \\ \frac{3}{14}\sqrt{14} \\ -\frac{3}{7}\sqrt{14} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

(答) V の最大値: $3 + \sqrt{14}$, $P\left(-\frac{9}{14}\sqrt{14}, \frac{3}{14}\sqrt{14}, -\frac{3}{7}\sqrt{14}\right)$

【Ⅲ】

(1)

$$\frac{dy}{dx} = 2 \log x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \log x}{x}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 2 \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{2 - 2 \log x}{x^2}$$

となる。また $x > 0$ から

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &> 0 \\ \Leftrightarrow 2 \log x &> 0 \\ \therefore x &> 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2 \log x}{x}, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2 - 2 \log x}{x^2}, \frac{dy}{dx} > 0 \text{ となる範囲 } x > 1$$

(2)

接点を実数 $t (t > 0)$ を用いて $\left(t, (\log t)^2 + \frac{3}{4}\right)$ とおく。このとき接線の方程式は

$$y = \frac{2 \log t}{t} (x - t) + (\log t)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\therefore y = \frac{2 \log t}{t} x + (\log t)^2 - 2 \log t + \frac{3}{4} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。これが原点 $(0, 0)$ を通るとき

$$\begin{aligned} (\log t)^2 - 2 \log t + \frac{3}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 \log t - 3)(2 \log t - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log t &= \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \\ \therefore t &= e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。これを①に代入すると

$$y = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} x, y = \frac{3}{e^{\frac{3}{2}}} x$$

$$\therefore y = e^{-\frac{1}{2}} x, y = 3e^{-\frac{3}{2}} x$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = e^{-\frac{1}{2}} x, y = 3e^{-\frac{3}{2}} x$$

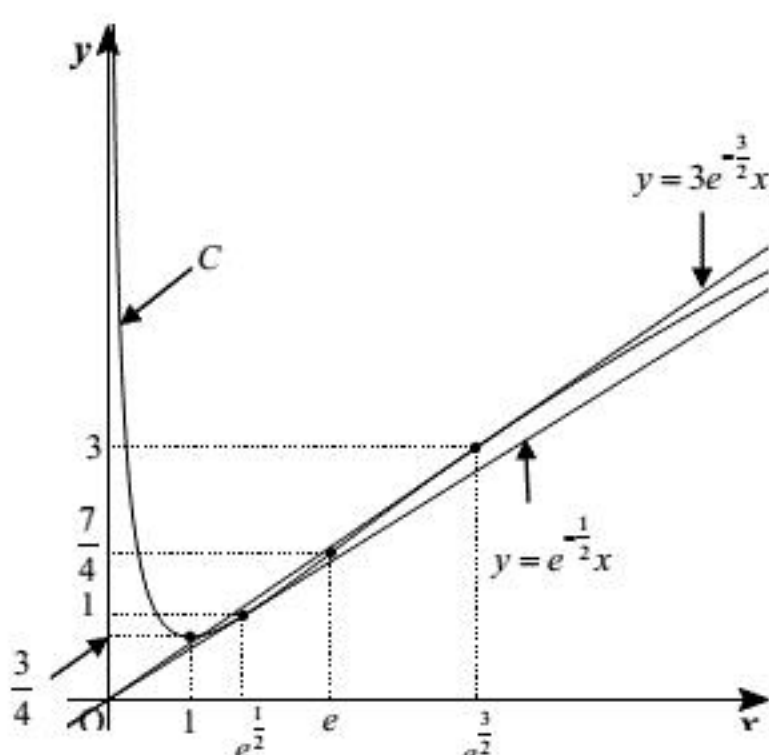
(3)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 - 2 \log x &= 0 \\ \therefore x &= e \end{aligned}$$

から、曲線 C の方程式について以下の増減表が書ける。

x	0	...	1	...	e	...
$\frac{dy}{dx}$		-	0	+		
$\frac{d^2 y}{dx^2}$		+		+	0	-
y		↘	$\frac{3}{4}$	↗	$\frac{7}{4}$	↘

さらに、 $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (\log x)^2 + \frac{3}{4} \right\} = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ (\log x)^2 + \frac{3}{4} \right\} = \infty$ であるので、曲線 C と(2)で求めた2直線のグラフは下のようになる。



(答) 前図

(4)

$3e^{-1} > 1$ であるので(2)で求めた接線の中で傾きが最大であるものは

$$y = 3e^{-\frac{3}{2}} x$$

となる。また、前図より

$$P\left(e^{\frac{3}{2}}, 3\right)$$

となる。

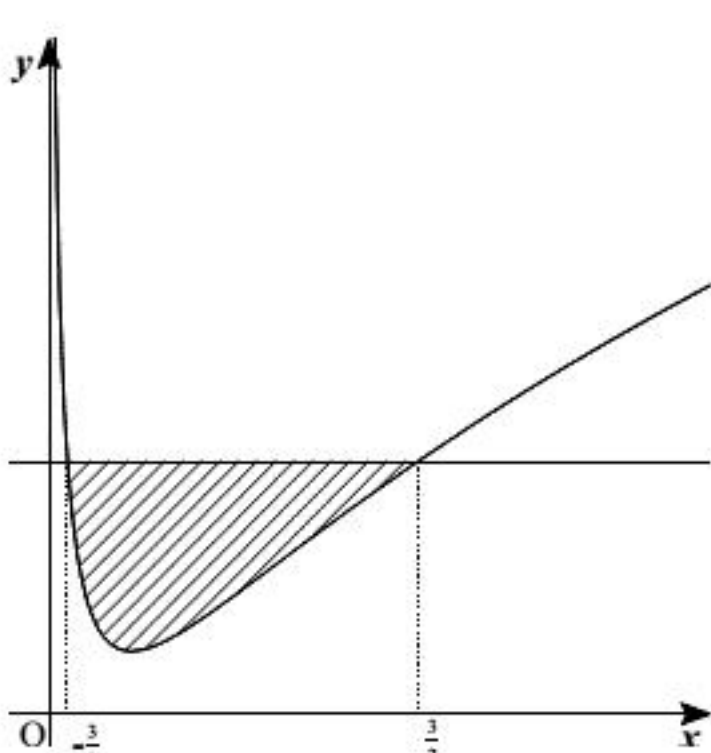
$$(\text{答}) \quad P\left(e^{\frac{3}{2}}, 3\right)$$

(5)

$y = 3$ と C の交点の x 座標を求める。

$$\begin{aligned} 3 &= (\log x)^2 + \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow \log x &= \pm \frac{3}{2} \\ \therefore x &= e^{-\frac{3}{2}}, e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。よって、求める面積は下図の斜線部分となる。



よって

$$\begin{aligned} S &= \int_{e^{-\frac{3}{2}}}^{e^{\frac{3}{2}}} \left\{ 3 - y \right\} dx \\ &= \int_{e^{-\frac{3}{2}}}^{e^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{9}{4} - (\log x)^2 \right\} dx \\ &= \frac{9}{4} \left(e^{\frac{3}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} \right) - \left[x (\log x)^2 \right]_{e^{-\frac{3}{2}}}^{e^{\frac{3}{2}}} + \int_{e^{-\frac{3}{2}}}^{e^{\frac{3}{2}}} 2 \log x dx \\ &= \frac{9}{4} \left(e^{\frac{3}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} \right) - \frac{9}{4} e^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{4} e^{-\frac{3}{2}} + 2 \left[x \log x \right]_{e^{-\frac{3}{2}}}^{e^{\frac{3}{2}}} - 2 \left[x \right]_{e^{-\frac{3}{2}}}^{e^{\frac{3}{2}}} \\ &= 3e^{\frac{3}{2}} + 3e^{-\frac{3}{2}} - 2e^{\frac{3}{2}} + 2e^{-\frac{3}{2}} \\ &= e^{\frac{3}{2}} + 5e^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad e^{\frac{3}{2}} + 5e^{-\frac{3}{2}}$$

【Ⅳ】

(1)

点 P における法線の傾きが $\tan \theta$ となる。よって $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，すなわち点 P における法線が x 軸と垂直になるのは，曲線 C_1 について

$$y' = -x$$

より $x_0 = 0$ のときのみである。よって $x_0 \neq 0$ として考えると，

$$\tan \theta = -\frac{1}{-x_0} = \frac{1}{x_0}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan \theta = \frac{1}{x_0}$$

(2)

(1)の答より， $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ のとき，

$$x_0 = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

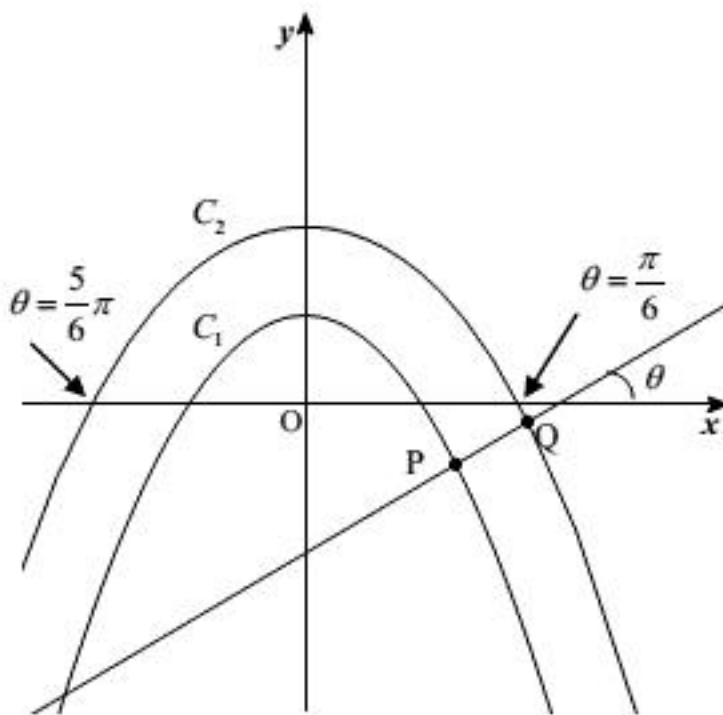
であり，また，

$$y_0 = 1 - \frac{1}{2}x_0^2 = 1 - \frac{\cos^2 \theta}{2\sin^2 \theta}$$

となる。 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき， $P(0, 1)$ であるから，上の式は $\theta = \frac{\pi}{2}$ でも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad x_0 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, y_0 = 1 - \frac{\cos^2 \theta}{2\sin^2 \theta}$$

(3)



上図より，

$$\begin{aligned} \overline{OQ} &= \overline{OP} + (\cos \theta, \sin \theta) \\ &= \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \cos \theta, 1 - \frac{\cos^2 \theta}{2\sin^2 \theta} + \sin \theta \right) \end{aligned}$$

となる。また， $0 < \theta < \pi$ において，

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 - \frac{\cos^2 \theta}{2\sin^2 \theta} + \sin \theta = 0 \\ \Leftrightarrow 2\sin^3 \theta + 3\sin^2 \theta - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sin \theta + 1)^2 (2\sin \theta - 1) &= 0 \\ \therefore \sin \theta &= \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad (x_1, y_1) = \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \cos \theta, 1 - \frac{\cos^2 \theta}{2\sin^2 \theta} + \sin \theta \right)$$

$$y_1 = 0 \text{ となる } \theta \text{ の値: } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

(4)

$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ のとき， $x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ であり，また

$$\frac{dx_1}{d\theta} = \frac{-\sin \theta \sin \theta - \cos \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} - \sin \theta = -\frac{1}{\sin^2 \theta} - \sin \theta$$

である。したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} y dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{2\sin^2 \theta} + \sin \theta \right) \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 \theta} - \sin \theta \right) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{2\sin^2 \theta} \right) \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{d\theta}{2\sin \theta} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\sin^2 \theta + \frac{3}{2}\sin \theta \right) d\theta \end{aligned}$$

となる。ここで，第 1 項については，

$$u = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

とおくと，

$$\begin{array}{c|cc} \frac{du}{d\theta} & = & -\frac{1}{\sin^2 \theta} \\ \theta & \frac{\pi}{6} & \rightarrow \frac{5\pi}{6} \\ u & \sqrt{3} & \rightarrow -\sqrt{3} \end{array}$$

となるので，

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{2\sin^2 \theta} \right) \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} &= \int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{2}u^2 \right) \cdot (-du) \\ &= 2 \left[u - \frac{1}{6}u^3 \right]_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

第 2 項については

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{d\theta}{2\sin \theta} &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{\sin \theta}{1 - \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[\log |1 - \cos \theta| - \log |1 + \cos \theta| \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \\ &= \frac{1}{4} \left(\log (2 + \sqrt{3})^2 - \log (2 - \sqrt{3})^2 \right) \\ &= \log (2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

となる。

第 3 項については，

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\sin^2 \theta + \frac{3}{2}\sin \theta \right) d\theta &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} (1 - \cos 2\theta + 3\sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta - 3\cos \theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{7\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

となる。

したがって，

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{3} + \log (2 + \sqrt{3}) + \frac{\pi}{3} + \frac{7\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{11\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} + \log (2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{11\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} + \log (2 + \sqrt{3})$$