

【I】

〔解答〕

(1)	ア	4
	イ	11
	ウ	-2
(2)	エ	$\frac{7}{3}$
	オ	$-2t$
(3)	カ	3
	キ	1
	ク	7
	ケ	6
	コ	$2^{n-1}-1$

〔解説〕

(1)

$f(x)$ を $x+3$ で割ると -10 余るから、剰余の定理より、

$$\begin{aligned} f(-3) &= -10 \\ \Leftrightarrow 5a - b - 19 &= -10 \\ \Leftrightarrow b &= 5a - 9 \end{aligned}$$

となる。よって $b = 5a - 9$ を $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4a + 2b + 8$ に代入すると、

$$f(x) = x^3 + ax^2 + (5a - 9)x + 6a - 10$$

となるから、これを $x^2 + 6x + 9$ で割ると

$$f(x) = (x^2 + 6x + 9)(x + a - 6) + (-a + 18)x - 3a + 44$$

となる。この余りが $14x + 32$ と一致するから、係数比較を行うことで

$$\begin{cases} -a + 18 = 14 \\ -3a + 44 = 32 \end{cases}$$

となり、 $a = 4$ を得る。したがって、 $b = 5a - 9 = 11$ であり、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 4x^2 + 11x + 14 \\ &= (x + 2)(x^2 + 2x + 7) \end{aligned}$$

となる。ここで 2 次方程式 $x^2 + 2x + 7 = 0$ の判別式を D とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 1 - 7 \\ &= -6 < 0 \end{aligned}$$

より、2 次方程式 $x^2 + 2x + 7 = 0$ は実数解を持たないことに注意すれば、 $f(x) = 0$ は実数解として -2 のみを持つことがわかる。

(2)

与えられた関数 $F(t)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_t^{t+1} (x^2 - 2tx + 3) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - tx^2 + 3x \right]_t^{t+1} \\ &= \frac{1}{3} \{ (t+1)^3 - t^3 \} - t \{ (t+1)^2 - t^2 \} + 3 \{ (t+1) - t \} \\ &= \frac{1}{3} (3t^2 + 3t + 1) - t(2t + 1) + 3 \\ &= -t^2 + \frac{10}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $t = 1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} F(1) &= -1 + \frac{10}{3} \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

となり、導関数 $F'(t)$ は、1 次式

$$F'(t) = -2t$$

となる。

(3)

まず、集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 2$) を互いに共通部分のない 2 グループに分ける分け方を考える。グループに A, B と名前をつけて区別して考えると、どちらのグループにも少なくとも 1 つの要素が含まれるようなグループ分けの仕方は、要素がどちらか一方にすべて含まれてしまう場合を除くことで

$$2^n - {}_2C_1 \cdot 1^n \quad (\text{通り})$$

と計算できるから、グループの区別をなくすと

$$\frac{2^n - {}_2C_1 \cdot 1^n}{2!} = 2^{n-1} - 1 \quad (\text{通り})$$

となり、つまり

$$S_2 = 2^{n-1} - 1$$

と求まることがわかる。よって、特に $n = 3, 4$ のときは

$$\begin{aligned} S_2 &= 2^{3-1} - 1 \\ &= 3 \\ S_2 &= 2^{4-1} - 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

となる。

次に、集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 3$) を互いに共通部分のない 3 グループに分ける分け方を考える。グループに A, B, C と名前をつけて区別して考えると、どちらのグループにも少なくとも 1 つの要素が含まれるようなグループ分けの仕方は、要素が 2 つのグループのみにすべて含まれてしまう場合と、要素が 1 つのグループのみにすべて含まれてしまう場合を除くことで

$$3^n - {}_3C_1(2^n - 2) - {}_3C_1 \cdot 1^n \quad (\text{通り})$$

と計算できるから、グループの区別をなくすと

$$\frac{3^n - {}_3C_1(2^n - 2) - {}_3C_1 \cdot 1^n}{3!} = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 2^n + 1) \quad (\text{通り})$$

となり、つまり

$$S_3 = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 2^n + 1)$$

と求まることがわかる。よって、特に $n = 3, 4$ のときは

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{2}(3^{3-1} - 2^3 + 1) \\ &= 1 \\ S_3 &= \frac{1}{2}(3^{4-1} - 2^4 + 1) \\ &= 6 \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)

以下、 x, y の値で場合分けすることで、 $|x-3|+|y-3| \leq 2$ の表す領域 D を図示することを考える。

[1] $x < 3, y < 3$ のとき

このとき

$$\begin{aligned} |x-3|+|y-3| &\leq 2 \\ \Leftrightarrow -(x-3)-(y-3) &\leq 2 \\ \Leftrightarrow y &\geq -x+4 \end{aligned}$$

となる。

[2] $x < 3, 3 \leq y$ のとき

このとき

$$\begin{aligned} |x-3|+|y-3| &\leq 2 \\ \Leftrightarrow -(x-3)+(y-3) &\leq 2 \\ \Leftrightarrow y &\leq x+2 \end{aligned}$$

となる。

[3] $3 \leq x, y < 3$ のとき

このとき

$$\begin{aligned} |x-3|+|y-3| &\leq 2 \\ \Leftrightarrow (x-3)-(y-3) &\leq 2 \\ \Leftrightarrow y &\geq x-2 \end{aligned}$$

となる。

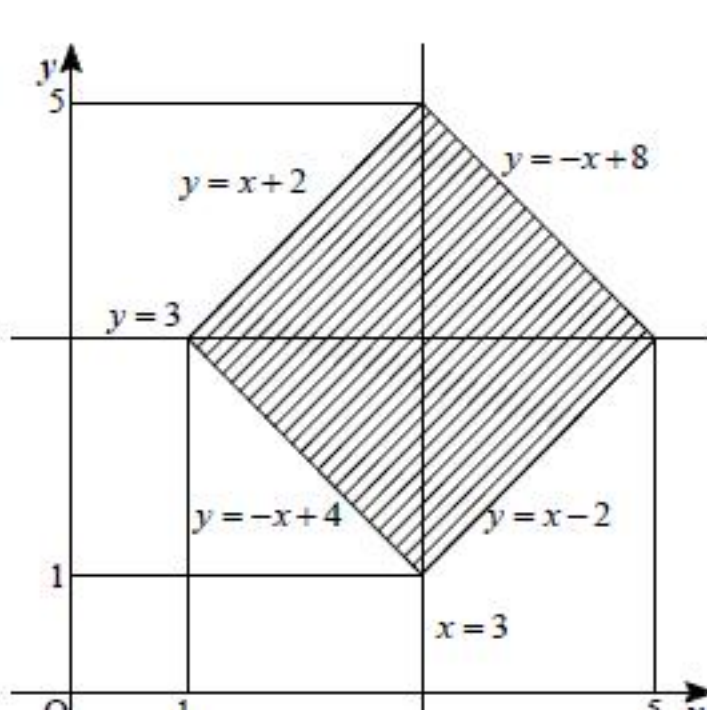
[4] $3 \leq x, 3 \leq y$ のとき

このとき

$$\begin{aligned} |x-3|+|y-3| &\leq 2 \\ \Leftrightarrow (x-3)+(y-3) &\leq 2 \\ \Leftrightarrow y &\leq -x+8 \end{aligned}$$

となる。

以上、[1], [2], [3], [4] より、領域 D は次図の斜線部(但し境界を含む)となる。



(答) 前図斜線部(但し境界を含む)

(2)

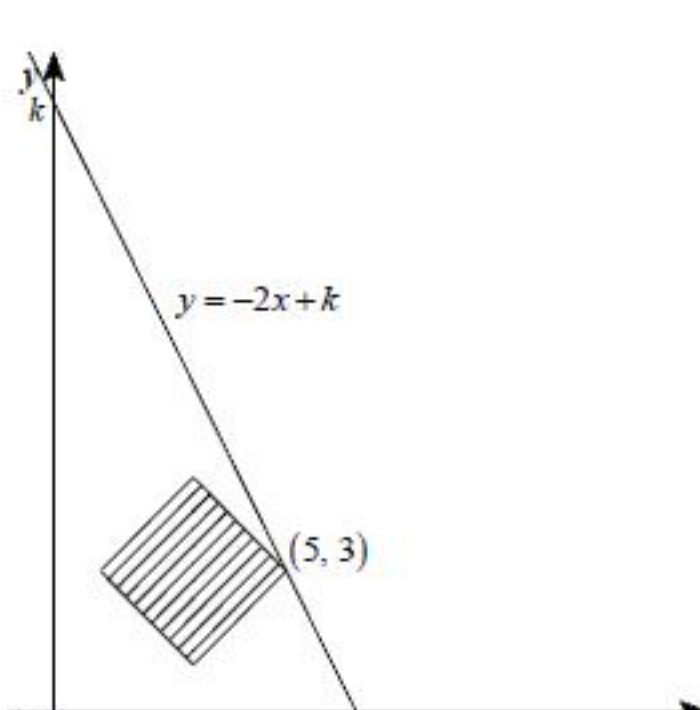
xy 平面上において、

$$2x+y=k$$

とおくと、これは直線

$$y=-2x+k$$

を表す。点 (x, y) が領域 D を動くときの $2x+y=k$ の最大値を求めるためには、 xy 平面上において直線 $y=-2x+k$ と領域 D が共有点をもつような条件を満たすときの k の最大値を求めればよい。ここで、 k は直線 $y=-2x+k$ の y 切片であり、直線 $y=-2x+k$ の傾きは -2 であることに注意すると、次図のように直線 $y=-2x+k$ が点 $(5, 3)$ を通るとき最大値をとることがわかる。



このときの k 、すなわち求める最大値は

$$k=2 \cdot 5+3=13$$

である。

(答) 最大値:13 ($x=5, y=3$ のとき)

(3)

xy 平面上において、

$$x^2+y^2-4x-2y=l$$

とおき、この式を変形すると

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x-2y &= l \\ \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2 &= l+5 \end{aligned}$$

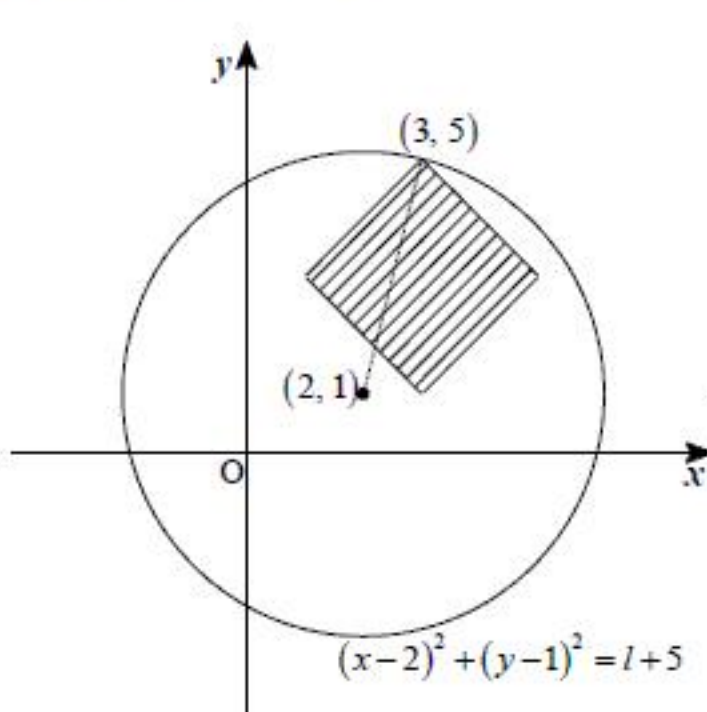
となるから、これは中心が $(2, 1)$ で半径が $\sqrt{l+5}$ の円を表す。また、点 $(2, 1)$ から点 $(3, 5)$ までの距離は

$$\sqrt{(3-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{17}$$

であり、点 $(2, 1)$ から点 $(5, 3)$ までの距離は

$$\sqrt{(5-2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$$

であることに注意すれば、(2)と同様考えることで、次図より l は円 $(x-2)^2+(y-1)^2=l+5$ が点 $(3, 5)$ を通るとき最大値をとることがわかる。



このときの l 、すなわち求める最大値は

$$\begin{aligned} \sqrt{l+5} &= \sqrt{17} \\ \therefore l &= 12 \end{aligned}$$

となる。

(答) 最大値:12 ($x=3, y=5$ のとき)

(4)

xy 平面上において、

$$\frac{y-1}{x+2}=m$$

とおき、この式を変形すると

$$\begin{aligned} \frac{y-1}{x+2} &= m \\ \Leftrightarrow y-1 &= m(x+2) \quad \text{かつ} \quad x \neq -2 \\ \therefore y &= m(x+2)+1 \quad \text{かつ} \quad x \neq -2 \end{aligned}$$

となるから、これは、傾きが m で常に点 $(-2, 1)$ を通る直線から 1 点 $(-2, 1)$ を除いた図形になる。また、この図形が点 $(3, 5)$ を通るとき、

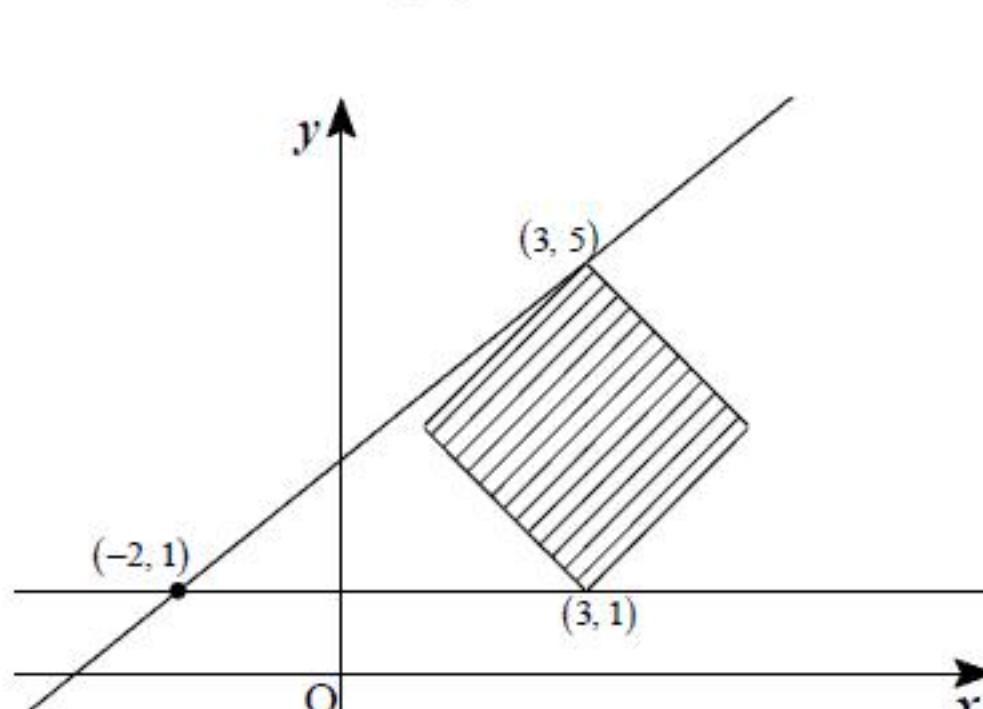
$$m = \frac{5-1}{3+2}$$

$$= \frac{4}{5}$$

となり、点 $(1, 3)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} m &= \frac{y-1}{x+2} \\ &= \frac{2}{3} \left(< \frac{4}{5} \right) \end{aligned}$$

となることがわかる。よって、(2)と同様考えることで、次図より m はこの図形が点 $(3, 5)$ を通るとき最大値をとることがわかり、点 $(3, 1)$ を通るとき最小値をとることがわかる。



また、上図より、 m は最大値と最小値の間の任意の値を取り得ることがわかるから、求める

$m = \frac{y-1}{x+2}$ の取り得る値の範囲は

$$\frac{1-1}{3+2} \leq \frac{y-1}{x+2} \leq \frac{5-1}{3+2}$$

$$\therefore 0 \leq \frac{y-1}{x+2} \leq \frac{4}{5}$$

であることがわかる。

(答) $0 \leq \frac{y-1}{x+2} \leq \frac{4}{5}$

〔III〕

(1)

まず、任意の正の整数 n に対し、 $a_n > 0$ であることを数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = 1 > 0$ であるから成り立つ。

[2] $n \leq l$ ($l=1, 2, \dots$) のとき $a_l > 0$ が成り立つとして、 $n=l+1$ のとき

与えられた漸化式と、帰納法の仮定より

$$a_{l+1} = \frac{1}{l^2 + 2l} \sum_{k=1}^l a_k > 0$$

となり、成り立つ。

以上、[1], [2] より、任意の正の整数 n に対し、 $a_n > 0$ が示された。特に、任意の正の整数 n に対

して、 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k > 0$ であることがわかる。すると、

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} \\ &= S_n + \frac{1}{n^2 + 2n} \cdot S_n \\ &= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \cdot S_n \end{aligned}$$

の両辺を $S_n \neq 0$ で割ることにより、

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

(2)

(1)を利用して S_n を n の式で表すことを考える。

[1] $n=1$ のとき

$S_1 = a_1 = 1$ である。

[2] $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{S_n}{S_{n-1}} \cdot \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \cdots \frac{S_3}{S_2} \cdot \frac{S_2}{S_1} \cdot S_1 \\ &= \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n}{n-1} \right) \cdot \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-1}{n-2} \right) \cdots \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} \right) \cdot 1 \\ &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \right) \cdot \left(\frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-2}{n-1} \right) \cdots \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{2}{1} \cdot 1 \\ &= \frac{2n}{n+1} \end{aligned}$$

となる。

以上、[1], [2] より、 $n=1$ のときも含めて、

$$S_n = \frac{2n}{n+1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{2n}{n+1}$$

(3)

(2)より、 $n \geq 2$ のとき、

$$a_n = \frac{1}{(n-1)^2 + 2(n-1)} \cdot S_{n-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} \cdot \frac{2(n-1)}{n} = \frac{2}{n(n+1)}$$

となり、これは、 $n=1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{2}{n(n+1)}$$

(4)

題意より、数列 $\{T_n\}$ は

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} a_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \left(-\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(-\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \cdots + \left(-\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} \right) - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad T_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

ここで、すべての正の整数 n に対して、

$$0 < \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}$$

が成り立つから、

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{2} - 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq T_n < \frac{1}{2}$$

が成り立つことが示された。

(証明終)