

2014年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて解答用紙の所定の箇所に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (7) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (8) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

余 白

〔 I 〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号の付いた の中に記入せよ.

(1) a は $a > 0$ を満たす実数とし、3 次関数 $f(x) = x^3 - ax^2 + a$ を考える.

このとき、 $f(x)$ は $x =$ ア で極小値をとる. また、 $f(x) = 0$ が、ただ 1 つの実数解を持つための条件は $a <$ イ である. 次に、関数 $g(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ を考える. $g(x)$ の最大値は ウ であり、曲線 $y = g(x)$ の第 1 象限にある変曲点の x 座標は エ である. さらに、 x 軸上の点 $(p, 0)$ ($p > 0$) から曲線 $y = g(x)$ への接線がただ 1 つ引けるための条件は $p <$ オ である.

(2) 初項 a_1 、公比 r が正の数である等比数列 $\{a_n\}$ について $a_2 = 6$,

$a_5 = 48$ が成り立っている. このとき、 $a_1 =$ 力 , $r =$ キ である. したがって、 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 =$ ク となる. $b_n = a_n a_{n+1}$ とすると数列 $\{b_n\}$ も公比 ケ の等比数列となり、 $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n =$ コ である.

〔 II 〕 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$ とする. 座標平面上に

3 点 $O(0, 0)$, $P(0, 2)$, $Q(10, -5)$ をとる. 次の問いに答えよ.

(1) 行列 A^2 と A^3 を求めよ.

(2) 行列 A^n と B^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

(3) 行列 A^n の表す 1 次変換による点 P の像を P_n , 行列 B^n の表す 1 次変換による点 Q の像を Q_n とする. 点 P_n と点 Q_n の座標をそれぞれ求めよ.

(4) $\triangle OP_n Q_n$ の面積 S_n を求めよ.

(5) S_n の最小値と、そのときの n の値を求めよ.

〔Ⅲ〕 媒介変数表示

$$\begin{cases} x = \sin(3t) \\ y = \sin(2t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

で定める曲線を C とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 曲線 C 上の点で, x 座標が最大となる点の座標をすべて求めよ.
また, x 座標が最小となる点の座標をすべて求めよ.
- (2) 曲線 C と直線 $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = 0$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ との交点の座標をすべて求めよ.
- (3) 曲線 C が x 軸に関して対称であることを示せ.
- (4) 座標平面上に曲線 C の概形を描け.
- (5) 曲線 C が囲む図形の面積を求めよ.

〔Ⅳ〕 次の問いに答えよ.

- (1) $x > 0$ のとき, 次の不等式が成立することを示せ.

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

- (2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right)$ を求めよ.
- (3) 極限值 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t}$ を求めよ.
- (4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{-\frac{1}{2n}} - 1 \right)$ と極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}} - 1 \right)$ をそれぞれ求めよ.
- (5) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - e \right)$ を求めよ.

以下余白