

## 2014年度 入学試験問題

# 数 学

### 注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。  
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。  
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。  
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。  
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (7) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (8) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

余 白

〔Ⅰ〕 次の  に適する数または式を、解答用紙の同じ記号の付いた  の中に記入せよ.

- (1) 数列  $\{a_n\}$  が  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 4a_n + 1$  で与えられているとき,  
 $a_2 =$   ア  であり, その一般項は  $a_n =$   イ  となる. また,  
 $a_{n+2} - a_n$  を 5 で割った余りは  ウ  である. ここで,  $a_n$  を 5 で  
割った余りを  $b_n$  とする. このとき,  $b_4 =$   エ  ,  $b_5 =$   オ   
であり,  $\sum_{k=1}^{2n} a_k b_k =$   カ  である.
- (2) 座標平面において 1 次変換  $f$  による点  $A(2, 0)$  の像は点  $C(4, 0)$  であり,  
点  $B(0, 4)$  の像も点  $C(4, 0)$  であるとする. このとき,  $f$  による点  
 $D(3, 2)$  の像は点 (  キ  ,  ク  ) である. 次に, 放物線上を  
動く点  $P\left(t, -\frac{1}{2}t^2 + 1\right)$  ( $0 \leq t \leq 4$ ) の  $f$  による像を点  $Q$  とする.  
点  $Q$  の  $x$  座標の最大値は  ケ  であり, そのときの点  $P$  の  $x$  座  
標は  コ  である.

〔Ⅱ〕 座標空間において原点  $O(0, 0, 0)$  と, 3 点  $A(a, a, b)$ ,  $B(a, b, a)$ ,  
 $C(b, a, a)$  ( $b > a \geq 0$ ) を頂点とする四面体  $OABC$  を考える. 次の問いに  
答えよ.

- (1)  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を求めよ.
- (2) 四面体  $OABC$  の体積  $V$  を求めよ.
- (3) 四面体  $OABC$  が正四面体となる条件を,  $a$  と  $b$  を用いて表せ.
- (4)  $a, b$  がともに自然数のとき, (3) の条件を満たす  $b$  の最小値と, その  
ときの  $a$  の値をそれぞれ求めよ. また, そのときの  $S$  と  $V$  を求めよ.

〔Ⅲ〕座標平面において  $x$  軸上を動く点  $P(a, 0)$  を中心とする半径 1 の円を  $K$  とする. 次の問いに答えよ.

(1) 円  $K$  が直線  $y = x - 2$  と接するときの  $a$  の値を求めよ.

(2)  $t$  を変数とする関数を,  $F(t) = \int_t^1 \sqrt{1-x^2} dx$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ) とする.

$0 \leq a < 1$  のとき, 円  $K$  の内部と領域  $x \leq 0$  の共通部分の面積を関数  $F(t)$  を用いて表せ.

(3) 領域  $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq x - 2\}$  とする. 円  $K$  の内部と領域  $D$  との共通部分の面積が最大となるときの  $a$  の値を求めよ.

〔Ⅳ〕 $O$  を原点とする座標平面において, 曲線  $C_1 : y = \log x + \log t$  と曲線  $C_2 : y = ax^2$  を考える. ただし  $a$  と  $t$  は正の実数である. 曲線  $C_1$  と  $C_2$  は共有点  $P$  を持ち, また,  $P$  における  $C_1$  と  $C_2$  の接線が一致するものとする. 次の問いに答えよ.

(1)  $P$  の  $x$  座標を  $x_0$  とする.  $x_0, a, t$  の間に成立する関係式を書け.

(2)  $x_0$  と  $a$  をそれぞれ  $t$  を用いて表せ.

(3)  $P$  における  $C_2$  の法線を  $\ell$  とする. また,  $\ell$  と  $x$  軸の交点を  $Q$ ,  $\ell$  と  $y$  軸の交点を  $R$  とする.  $\triangle OQR$  の面積  $S(t)$  を求め, また,  $S(t)$  を最小とする  $t$  の値を求めよ.

(4)  $t$  が (3) で求めた値のとき, 曲線  $C_1, C_2$  と  $x$  軸が囲む図形の面積を求めよ.

以下余白



