

2014年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (7) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (8) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余白

余 白

〔Ⅰ〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号の付いた の中に記入せよ。

袋の中に 1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれた 9 個の球が入っている。この袋から球を 1 個取り出し、取り出した球の数字を調べて袋に戻すことを 2 回行うとき、取り出した球に書かれた数字のうちの最大値を X とする。 X が 3 以下となる場合の数は ア 通りである。また、 X が 4 以下となる場合の数は イ 通りである。 X が 3 となる場合の数は ウ 通りであるので、 X が 3 と等しくなる確率は エ である。したがって、 $i = 1, 2, 3, \dots, 9$ に対して、 X が i と等しくなる確率は オ であり、 X の期待値は カ である。

次に、この袋から球を 1 個取り出し、取り出した球の数字を調べて袋に戻すことを k 回行うとき (k は自然数)、取り出した球に書かれた数字のうちの最大値を Y とする。 Y が j ($j = 1, 2, 3, \dots, 9$) 以下となる場合の数は キ 通りであり、 Y が j と等しくなる場合の数は ク 通りである。したがって、 Y が j と等しくなる確率は ケ であり、 Y の期待値は $9 - \frac{1}{9^k} \sum_{j=1}^8$ コ である。

〔Ⅱ〕 座標空間内の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 上に 3 点 $A(3, 0, 0)$, $B(2, 1, 2)$, $C(1, -2, 2)$ をとる。次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (2) 3 点 A, B, C を通る平面に、原点 O から下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。
- (3) 球面上を動く点 P を頂点とする四面体 $PABC$ を考え、その体積を V とする。 V の最大値と、そのときの点 P の座標を求めよ。

〔Ⅲ〕 曲線 $C: y = (\log x)^2 + \frac{3}{4}$ ($x > 0$) について、以下の問いに答えよ。

- (1) $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。また、 $\frac{dy}{dx} > 0$ となる x の範囲を求めよ。
- (2) 曲線 C の接線で原点 $(0, 0)$ を通るものを求めよ。
- (3) 曲線 C の概形と (2) で求めた接線を描け。
- (4) (2) で求めた接線の中で傾きが最大のものと曲線 C との接点を P とする。点 P の座標を求めよ。
- (5) (4) で求めた点 P を通り x 軸に平行な直線と曲線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

〔Ⅳ〕 曲線 $C_1: y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ 上を動く点 P の座標を (x_0, y_0) とする。点 P における曲線 C_1 の法線上にあり、点 P からの距離が 1 の点で $y > 1 - \frac{1}{2}x^2$ を満たす点を $Q(x_1, y_1)$ とする。また、2 点 P, Q を通る直線が x 軸の正の向きとなす角を θ ($0 < \theta < \pi$) とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\tan \theta$ を x_0 を用いて表せ。
- (2) x_0 と y_0 を $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を用いて表せ。
- (3) x_1 と y_1 を $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を用いて表せ。また、 $y_1 = 0$ となるとき θ の値を求めよ。
- (4) 曲線 C_1 上を点 P が動くとき、点 Q が描く曲線を C_2 とする。曲線 C_2 と x 軸が囲む図形の面積 S を求めよ。

以下余白