

【1】

【解答】

- (1) ア 4 イ -5
- (2) ウ $6n^2-30n$ エ $4\cdot 5^{n-1}$ オ $2n^3-18n^2+16n-5^{n-1}$
- (3) カ 9 キ $72(\sqrt{2}-1)$
- (4) ク $\frac{61}{216}$ ケ $\frac{1}{9}$ コ $\frac{7}{27}$

【解説】

(1)

$P(x)$ を $(x+3)(x-3)$ で割った余りを $ax+b$ とおくと、 $P(x)$ は

$$\begin{cases} P(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+5x-2 & \cdots \textcircled{1} \\ P(x)=(x-2)(x-3)R(x)-x+10 & \cdots \textcircled{2} \\ P(x)=(x+3)(x-3)S(x)+ax+b & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

の3通りで表せる。①、③に $x=-3$ を代入するとそれぞれ

$$\begin{aligned} P(-3) &= -17 \\ P(-3) &= -3a+b \end{aligned}$$

となるので

$$-3a+b=-17 \qquad \cdots \textcircled{4}$$

となる。②、③に $x=3$ を代入するとそれぞれ

$$\begin{aligned} P(3) &= 7 \\ P(3) &= 3a+b \end{aligned}$$

となるので

$$3a+b=7 \qquad \cdots \textcircled{5}$$

となる。④、⑤を連立して解くと

$$a=4, b=-5$$

となる。よって、求める余りは $4x-5$ となる。

(2)

$$\begin{aligned} a_n &= -24+12(n-1) \\ &= 12n-36 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}n(a_1+a_n) \\ &= \frac{1}{2}n(-24+12n-36) \\ &= 6n^2-30n \end{aligned}$$

となる。次に、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める。 $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} b_1 &= T_1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= T_n - T_{n-1} \\ &= (5^n-1) - (5^{n-1}-1) \\ &= 4\cdot 5^{n-1} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときも成り立つので、 $n \geq 1$ のとき

$$b_n = 4\cdot 5^{n-1}$$

となる。次に、数列 $\{c_n\}$ の一般項を求める。漸化式が

$$c_{n+1} = c_n + S_n - b_n$$

で与えられるので、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (S_k - b_k) \\ &= -1 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k^2 - 30k) - T_{n-1} \\ &= -1 + 6\cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) - 30\cdot \frac{1}{2}(n-1)n - (5^{n-1}-1) \\ &= 2n^3 - 18n^2 + 16n - 5^{n-1} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときも成り立つので、 $n \geq 1$ のとき

$$c_n = 2n^3 - 18n^2 + 16n - 5^{n-1}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned} y &= |x^2-4x-5| \\ &= |(x+1)(x-5)| \\ &= |(x-2)^2-9| \end{aligned}$$

より、曲線 C のグラフは以下になる。



上図より、曲線 C と直線 ℓ の共有点の個数が3個となるのは、直線 $\ell: y=k$ が点 $(2, 9)$ を通るときであるから

$$k=9$$

となる。直線 ℓ と曲線 C で囲まれた図形は上図の斜線部であるから、曲線 C と直線 ℓ の共有点のうち $(2, 9)$ を除いた2点の x 座標をそれぞれ α, β ($\alpha < \beta$) とすると、斜線部の面積は

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} \{9 - (x^2 - 4x - 5)\} dx - 2 \int_{-1}^2 \{-(x^2 - 4x - 5)\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx + 2 \int_{-1}^5 (x + 1)(x - 5) dx \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} - 2 \cdot \frac{\{1 - (-5)\}^3}{6} \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} - 72 \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 α, β は

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 5 &= 9 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x - 14 &= 0 \end{aligned}$$

の解であることから

$$\alpha = 2 - 3\sqrt{2}, \beta = 2 + 3\sqrt{2}$$

となるので、求める面積は

$$\begin{aligned} \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} - 72 &= \frac{\{(2 + 3\sqrt{2}) - (2 - 3\sqrt{2})\}^3}{6} - 72 \\ &= 72\sqrt{2} - 72 \\ &= 72(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

となる。

(4)

出た目の最大値が5以下となる確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^3$ となる。また、出た目の最大値が4以下となる確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^3$ となる。したがって、出た目の最大値が5となる確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{61}{216}$$

である。出た目の最大値が5、かつ最小値が1となる目の組み合わせは

$$(5, 5, 1), (5, 4, 1), (5, 3, 1), (5, 2, 1), (5, 1, 1)$$

である。それぞれの目の組み合わせの順列を考えると、出た目の最大値が5、かつ最小値が1となる確率は

$$\frac{3+6+6+6+3}{6^3} = \frac{1}{9}$$

である。3つの出た目の積が2の倍数であり、かつ3の倍数ではないのは、出た目の中に2または4が含まれ、かつ3と6が含まれないときである。出た目の中に3と6が含まれない確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^3$ となる。また、出た目の中に3と6が含まれず、かつ2も4も含まれない確率は $\left(\frac{2}{6}\right)^3$ となる。したがって、出た目の中に2または4が含まれ、かつ3と6が含まれない確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 - \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{7}{27}$$

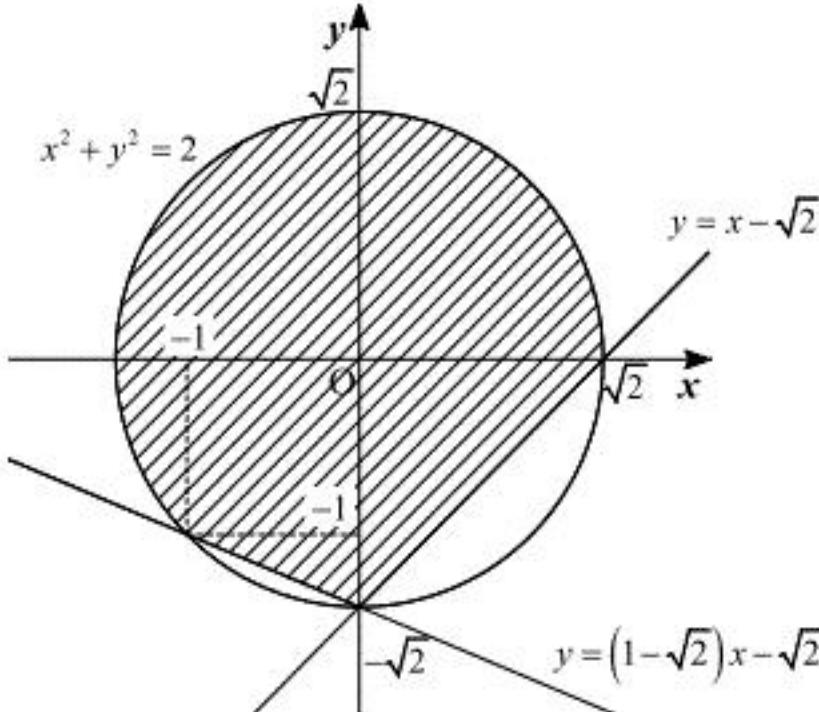
である。よって、3つの出た目の積が2の倍数であり、かつ3の倍数ではない確率は $\frac{7}{27}$ である。

【Ⅱ】

(1)

$$\begin{aligned}x-y &\leq \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow y &\geq x-\sqrt{2} \\ (1-\sqrt{2})(x+1) &\leq y+1 \\ \Leftrightarrow y &\geq (1-\sqrt{2})x-\sqrt{2}\end{aligned}$$

より、領域 D は次図の斜線部となる。ただし、境界を含む。



(答) 前図

(2)

$$\begin{aligned}k &= x + \sqrt{3}y \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{k}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

より、直線 $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{k}{\sqrt{3}}$ が領域 D と共有点を持つような k の最大値と最小値を求めればよい。

k が最大となるのは、(1)の図より直線 $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{k}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y - k = 0$ が円 $x^2 + y^2 = 2$ に

第1象限で接するときであるから、

$$k = x + \sqrt{3}y > 0 \quad (\because x, y > 0)$$

のもとで、点と直線の距離の公式より k の最大値は

$$\begin{aligned}\frac{|-k|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} &= \sqrt{2} \\ \therefore k &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。このときの円と直線の接点を P とすると、直線 OP は直線 $x + \sqrt{3}y - k = 0$ と直行することから直線 OP の傾きは $\sqrt{3}$ である。よって、接点の座標は

$$\sqrt{2}(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

となる。次に、 k が最小となる場合を考えると、直線 $y = (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2}$ と直線 $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{k}{\sqrt{3}}$ 、

および点 $(-1, 1)$ における円 $x^2 + y^2 = 2$ の接線について、

$$\begin{aligned}1 - \sqrt{2} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \\ &> \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \\ &> 0\end{aligned}$$

より傾きを比較すると

$$-1 < -\frac{1}{\sqrt{3}} < 1 - \sqrt{2}$$

となるので、(1)の図より k が最小となるのは直線 $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{k}{\sqrt{3}}$ が点 $(-1, 1)$ を通るときである。

したがって、 k の最小値は

$$\begin{aligned}k &= -1 + \sqrt{3} \cdot (-1) \\ &= -1 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

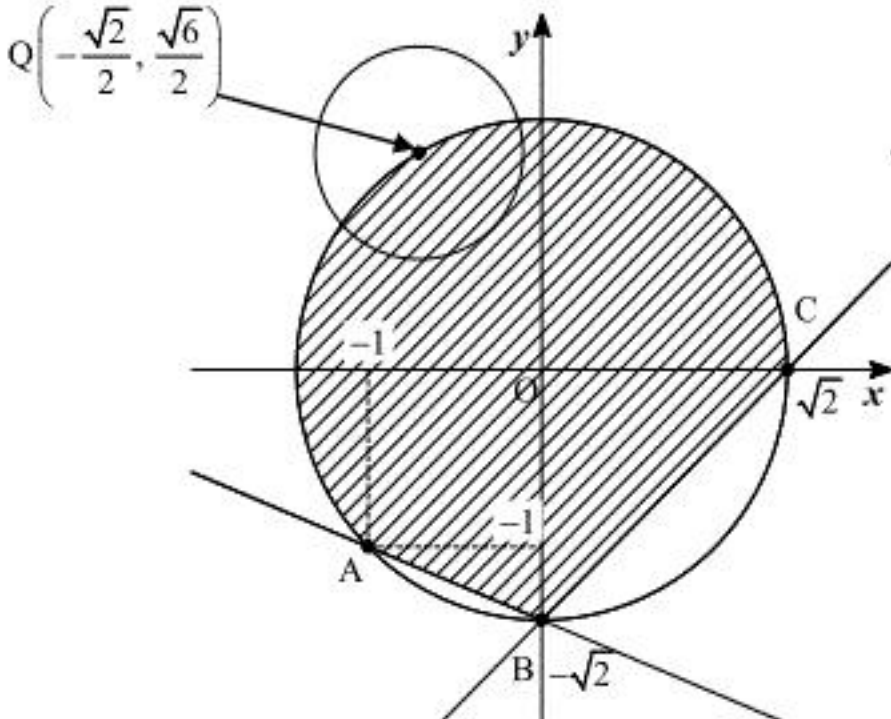
となる。以上より、 k は $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$ をとり、 $(x, y) = (-1, -1)$ のとき

最小値 $-1 - \sqrt{3}$ をとる。

$$(答) \quad (x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \text{ のとき最大値 } 2\sqrt{2}$$

$$(x, y) = (-1, -1) \text{ のとき最小値 } -1 - \sqrt{3}$$

(3)



$$\begin{aligned}m &= x^2 + y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{6}y \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 &= m + 2\end{aligned}$$

より、点 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ を中心とする半径 $\sqrt{m+2}$ の円と領域 D が共有点を持つような m の最大

値と最小値を求めればよい。上図のように点 A, B, C を定めると、 m が最大となるのは円

$\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = m + 2$ が点 A, B, C のいずれかを通るときである。 m の値はそれぞれ

$$\begin{aligned}A: m &= (-1)^2 + (-1)^2 + \sqrt{2} \cdot (-1) - \sqrt{6} \cdot (-1) \\ &= 2 + \sqrt{6} - \sqrt{2} \\ B: m &= (-\sqrt{2})^2 - \sqrt{6} \cdot (-\sqrt{2}) \\ &= 2 + 2\sqrt{3} \\ C: m &= (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \\ &= 4\end{aligned}$$

となるので、 m は $(x, y) = (0, -\sqrt{2})$ のとき最大値 $2 + 2\sqrt{3}$ をとる。一方で m が最小となるのは、

上図より円 $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = m + 2$ の半径が 0 となるときであるから、 m の最小値は

$$\begin{aligned}\sqrt{m+2} &= 0 \\ \therefore m &= -2\end{aligned}$$

となり、このとき

$$(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

となる。

$$(答) \quad (x, y) = (0, -\sqrt{2}) \text{ のとき最大値 } 2 + 2\sqrt{3}$$

$$(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \text{ のとき最小値 } -2$$

〔Ⅲ〕

(1)

$a > 1$ より

$$a^x > 0, a^{-x} > 0$$

なので、相加平均・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} t &= a^x + a^{-x} \\ &\geq 2\sqrt{a^x \cdot a^{-x}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。よって $t \geq 2$ となる。等号成立は

$$\begin{aligned} a^x &= a^{-x} \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

のときとなる。

(答) $t \geq 2$

(2)

$$\begin{aligned} t^2 &= (a^x + a^{-x})^2 \\ &= a^{2x} + a^{-2x} + 2 \\ t^3 &= (a^{2x} + a^{-2x} + 2)(a^x + a^{-x}) \\ &= a^{3x} + a^{-3x} + 3(a^x + a^{-x}) \\ &= a^{3x} + a^{-3x} + 3t \end{aligned}$$

となる。よって、

$$a^{3x} + a^{-3x} = t^3 - 3t$$

となる。

(答) $a^{3x} + a^{-3x} = t^3 - 3t$

(3)

(2)の計算を用いると

$$\begin{aligned} y &= a^{3x} - 3a^{2x+1} + 3a^{x+2} + 3a^{-x+2} - 3a^{-2x+1} + a^{-3x} \\ &= a^{3x} + a^{-3x} - 3a(a^{2x} + a^{-2x}) + 3a^2(a^x + a^{-x}) \\ &= t^3 - 3t - 3a(t^2 - 2) + 3a^2t \\ &= t^3 - 3at^2 + 3(a^2 - 1)t + 6a \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = t^3 - 3at^2 + 3(a^2 - 1)t + 6a$

(4)

$y = t^3 - 3at^2 + 3(a^2 - 1)t + 6a$ より

$$f(t) = t^3 - 3at^2 + 3(a^2 - 1)t + 6a$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3t^2 - 6at + 3(a^2 - 1) \\ &= 3\{t - (a - 1)\}\{t - (a + 1)\} \end{aligned}$$

となる。したがって、 t が任意の実数を動くときの $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	$a-1$	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$a > 1$ より、 $t \geq 2$ における $f(t)$ の最小値は $f(a+1)$ と $f(2)$ のうち小さいほうとなる。ここで、

$$\begin{aligned} f(a+1) &= (a+1)^3 - 3a(a+1)^2 + 3(a^2 - 1)(a+1) + 6a \\ &= a^3 + 3a - 2 \\ f(2) &= 2^3 - 3a \cdot 2^2 + 3(a^2 - 1) \cdot 2 + 6a \\ &= 6a^2 - 6a + 2 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} f(a+1) - f(2) &= a^3 - 6a^2 + 9a - 4 \\ &= (a-1)^2(a-4) \end{aligned}$$

となる。よって、 $1 < a < 4$ のとき $f(a+1) < f(2)$ となり、 y の最小値は $a^3 + 3a - 2$ となる。また、 $4 \leq a$ のとき $f(a+1) \geq f(2)$ となり、 y の最小値は $6a^2 - 6a + 2$ となる。

(答) $a^3 + 3a - 2$ ($1 < a < 4$ のとき)

$6a^2 - 6a + 2$ ($4 \leq a$ のとき)