

〔Ⅰ〕

〔解答〕

- (1)    ア    $-\frac{4}{3}$                                   イ    $\frac{4}{5}$   
(2)    ウ    $-1$                                   エ    $3$                                   オ    $5$   
(3)    カ    $1 < x \leq 3$                                   キ    $3$                                   ク    $146$   
(4)    ケ    $\frac{27}{512}$                                   コ    $\frac{65}{1024}$

〔解説〕

(1)

$\tan \frac{\theta}{2} = 2$  であるとき、非負の整数  $n$  を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} + n\pi < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} + n\pi \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2n\pi < \theta < \pi + 2n\pi \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

であるもとで

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \theta} &= 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} \\ \Leftrightarrow \sin^2 \theta &= \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} \\ \Leftrightarrow \sin \theta &= \sqrt{\frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1}} \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^2}{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 1}} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$\triangle ABC$  の外接円の中心を  $I$  とおくと、点  $I$  は  $\triangle ABC$  の各辺の垂直二等分線の交点である。辺  $AB$  の傾きは  $-2$ 、中点の座標は  $(-5, 1)$  であるから、辺  $AB$  の垂直二等分線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x+5)+1 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となり、辺  $BC$  の傾きは  $1$ 、中点の座標は  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$  であるから、辺  $BC$  の垂直二等分線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow y &= -x + 2 \end{aligned}$$

となる。よって、点  $I$  の座標は

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \\ y = -x + 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) = (-1, 3) \end{aligned}$$

であり、 $\triangle ABC$  の外接円の半径は

$$\begin{aligned} IC &= \sqrt{\{3 - (-1)\}^2 + \{6 - 3\}^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

となる。

(3)

実数  $x$  が不等式  $\log_3(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(5-x) \leq 0$  を満たすとき、真数条件より

$$\begin{aligned} x-1 > 0 \text{ かつ } 5-x > 0 \\ \Leftrightarrow 1 < x < 5 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

であるもとで

$$\begin{aligned} \log_3(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(5-x) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \log_3(x-1) + \frac{\log_3(5-x)}{\log_3 \frac{1}{3}} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \log_3(x-1) &\leq \log_3(5-x) \\ \Leftrightarrow x-1 &\leq 5-x \quad (\because 3 > 1) \\ \Leftrightarrow x &\leq 3 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

となるから、 $x$  がとり得る値の範囲は①、②より

$$1 < x \leq 3 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。また、 $t = 3^x$  とおくと、③のとき

$$3 < t \leq 27$$

であるもとで

$$\begin{aligned} y &= 9^x - 30 \cdot 3^x + 227 \\ &= t^2 - 30t + 227 \\ &= (t-15)^2 + 2 \end{aligned}$$

となるから、 $y$  は

$$t = 27 \text{ つまり } x = 3 \text{ のとき、最大値 } 146$$

をとる。

(4)

コインを投げたとき、表と裏の出方は同様に確からしいとする。2枚のコインを投げたとき、両方とも表の面が出る事象、両方とも裏の面が出る事象、表の面と裏の面が1枚ずつ出る事象をそれぞれ事象  $A, B, C$  とし、事象  $X$  が起こる確率を  $P(X)$  と表すこととすると

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{4}, P(C) = \frac{1}{2}$$

である。ちょうど5回目で終了するのは、4回目までに事象  $A$  が2回と事象  $B, C$  のいずれかが2回起こり、かつ、5回目に事象  $A$  が起こる場合であるから、このようになる確率は

$${}_4C_2 \{P(A)\}^2 \{P(B)+P(C)\}^2 \cdot \{P(A)\} = \frac{27}{512}$$

となる。次に、ちょうど6回目で終了するのは、5回目までに事象  $A$  が2回と事象  $B, C$  のいずれかが3回起こり、かつ、6回目に事象  $A$  が起こる場合であるから、このようになる確率は

$${}_5C_2 \{P(A)\}^2 \{P(B)+P(C)\}^3 \cdot \{P(A)\} = \frac{135}{2048}$$

となる。また、両方とも裏の面が出た回数が3回であり、かつ、ちょうど6回目で終了するのは、5回目までに事象  $A$  が2回と事象  $B$  が3回起こり、かつ、6回目に事象  $A$  が起こる場合であるから、このようになる確率は

$${}_5C_2 \{P(A)\}^2 \{P(B)\}^3 \cdot \{P(A)\} = \frac{5}{2048}$$

となる。ちょうど6回目で終了するとき、両方とも裏の面が出た回数は3回以下であるから、以上の結果より、両方とも裏の面が出た回数が2回以下であり、かつ、ちょうど6回目で終了する確率は

$$\frac{135}{2048} - \frac{5}{2048} = \frac{65}{1024}$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 \text{ について}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x$$

であるから、曲線  $C: y = f(x)$  上の点  $P(p, f(p))$  における接線  $\ell$  の方程式は

$$y = f'(p)(x - p) + f(p)$$

$$\Leftrightarrow 3p(p - 4)x + y - 2p^2(p - 3) = 0$$

となる。直線  $m$  は直線  $\ell$  と直交し原点を通るから、その方程式は

$$x - 3p(p - 4)y = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \text{ 直線 } \ell: 3p(p - 4)x + y - 2p^2(p - 3) = 0, \text{ 直線 } m: x - 3p(p - 4)y = 0$$

(2)

曲線  $C$  と直線  $\ell$  の共有点の  $x$  座標は

$$3p(p - 4)x + (-x^3 + 6x^2) - 2p^2(p - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 - 3p(p - 4)x + 2p^2(p - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - p)^2(x + 2p - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = p, -2p + 6$$

となる。ここで、曲線  $C$  と直線  $\ell$  が  $P$  とは異なる共有点をもつのは

$$p \neq -2p + 6$$

$$\Leftrightarrow p \neq 2$$

となるときである。このとき、 $Q$  の  $x$  座標は  $x = -2p + 6$  となり、 $y$  座標は

$$y = f(-2p + 6)$$

$$= 8p(p - 3)^2$$

である。

$$(\text{答}) Q(-2p + 6, 8p(p - 3)^2)$$

(3)

直線  $\ell$  と  $y$  軸の交点である点  $R$  の座標は  $(0, 2p^2(p - 3))$  である。また、線分  $PQ$  を  $1:4$  に外分する点の座標を  $(X, Y)$  とおくと

$$X = \frac{4p - (-2p + 6)}{4 - 1}$$

$$= 2(p - 1)$$

$$Y = \frac{4(-p^3 + 6p^2) - 8p(p - 3)^2}{4 - 1}$$

$$= -4p(p^2 - 6p + 6)$$

となる。よって、点  $R$  が線分  $PQ$  を  $1:4$  に外分するとき

$$X = 0 \text{ かつ } Y = 2p^2(p - 3)$$

$$\Leftrightarrow 2(p - 1) = 0 \text{ かつ } -4p(p^2 - 6p + 6) = 2p^2(p - 3)$$

$$\Leftrightarrow p = 1 \text{ かつ } p(p - 1)(p - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow p = 1$$

となるから、点  $P$  の  $x$  座標は  $x = 1$  であり、 $y$  座標は

$$y = f(1)$$

$$= 5$$

である。

$$(\text{答}) P(1, 5)$$

(4)

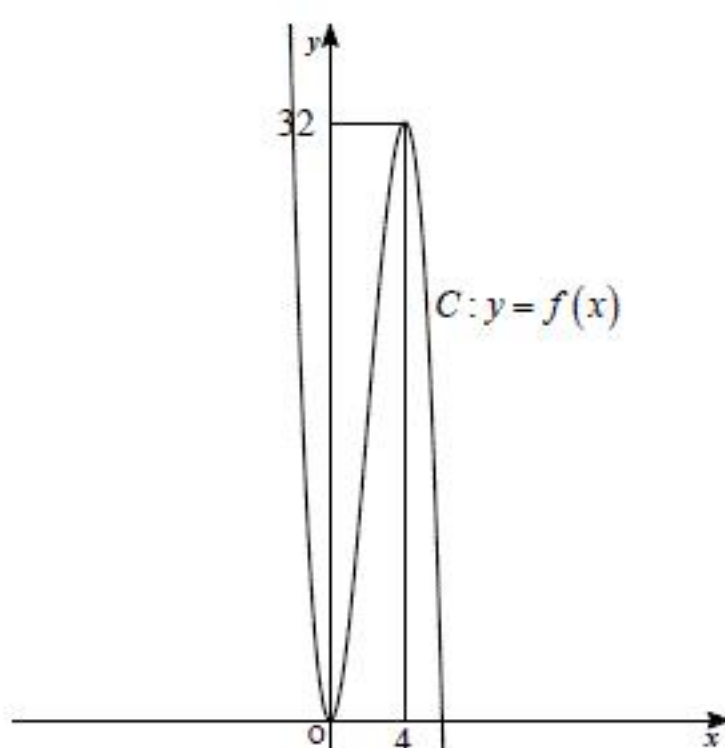
$$f'(x) = -3x^2 + 12x$$

$$= -3x(x - 4)$$

であるから、関数  $f(x)$  の増減表は以下のようになる。

|         |            |   |            |    |            |
|---------|------------|---|------------|----|------------|
| $x$     | ...        | 0 | ...        | 4  | ...        |
| $f'(x)$ | -          | 0 | +          | 0  | -          |
| $f(x)$  | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | 32 | $\searrow$ |

よって、曲線  $C: y = f(x)$  の概形は下図のようになる。



ここで、曲線  $C$  と直線  $m$  はともに原点を通るから、直線  $m$  と曲線  $C$  の共有点の個数が  $1$  個であるとき、その共有点は原点に他ならない。

[1]  $p = 0, 4$  のとき

$m: x = 0$  となるから、上図より曲線  $C$  と直線  $m$  は原点のみ共有点にもつ。

[2]  $p \neq 0, 4$  のとき

$m: y = \frac{x}{3p(p - 4)}$  となるから、曲線  $C$  と直線  $m$  の共有点の  $x$  座標は

$$f(x) = \frac{x}{3p(p - 4)}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + \frac{x}{3p(p - 4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left( x^2 - 6x + \frac{1}{3p(p - 4)} \right) = 0$$

となるから、曲線  $C$  と直線  $m$  が原点以外に共有点をもたないとき、 $x$  の方程式

$$x^2 - 6x + \frac{1}{3p(p - 4)} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

は  $x = 0$  以外の実数解をもたない。さらに、方程式①は  $x = 0$  を解にもたないから、この  $2$  次方程式の判別式を  $D$  とおくと

$$D < 0$$

$$\Leftrightarrow (-3)^2 - \frac{1}{3p(p - 4)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{27p^2 - 108p - 1}{3p(p - 4)} < 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。

[i]  $p(p - 4) > 0$  のとき

$$p < 0, 4 < p \quad \dots \textcircled{3}$$

のもとで、②より

$$27p^2 - 108p - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{\sqrt{327}}{9} < p < 2 + \frac{\sqrt{327}}{9} \quad \dots \textcircled{4}$$

となり、 $18 < \sqrt{327} < 19$  より  $2 - \frac{\sqrt{327}}{9} < 0, 4 < 2 + \frac{\sqrt{327}}{9}$  となるから、③、④を同時に

満たす  $p$  の範囲は

$$2 - \frac{\sqrt{327}}{9} < p < 0, 4 < p < 2 + \frac{\sqrt{327}}{9}$$

である。

[ii]  $p(p - 4) < 0$  のとき

$$0 < p < 4 \quad \dots \textcircled{5}$$

のもとで、②より

$$27p^2 - 108p - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow p < 2 - \frac{\sqrt{327}}{9}, 2 + \frac{\sqrt{327}}{9} < p \quad \dots \textcircled{6}$$

となり、 $18 < \sqrt{327} < 19$  より  $2 - \frac{\sqrt{327}}{9} < 0, 4 < 2 + \frac{\sqrt{327}}{9}$  となるから、⑤、⑥を同時に

満たす  $p$  の値は存在しない。

以上、[1], [2]より、求める  $p$  の範囲は

$$2 - \frac{\sqrt{327}}{9} < p \leq 0, 4 \leq p < 2 + \frac{\sqrt{327}}{9}$$

である。

$$(\text{答}) 2 - \frac{\sqrt{327}}{9} < p \leq 0, 4 \leq p < 2 + \frac{\sqrt{327}}{9}$$

