

【1】

【解答】

- (1) ア 360 イ 720 ウ 120 エ 360
(2) オ 60480 カ 6720 キ 840 ク 1680 ケ 145873 コ 145876

【解説】

(1)

偶数となるのは、1の位が2, 4, 6のいずれかのときであるから

$$3 \times 5! = 360 \text{ 個}$$

である。また、すべての位の和をとると

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+5+6 &= 21 \\ &= 3 \times 7 \end{aligned}$$

となるので、6桁の数は必ず3の倍数となる。したがって、3の倍数は

$$6! = 720 \text{ 個}$$

である。5の倍数となるのは、1の位が5のときであるから

$$5! = 120 \text{ 個}$$

である。6の倍数となるのは、偶数かつ3の倍数となるときであるが、6桁の数は必ず3の倍数となるので、偶数の個数に等しい。よって、6の倍数は360個である。

(2)

6桁の数の個数は全部で

$$\begin{aligned} {}_9P_6 &= 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \\ &= 60480 \end{aligned}$$

である。10万の位が1となる数の個数は、残りの5枠に8個の数字を自由に入れると考えると

$$\begin{aligned} {}_8P_5 &= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \\ &= 6720 \end{aligned}$$

である。10万の位が1であり1万の位が2となる数の個数は、残りの4枠に7個の数字を自由に入れると考えると

$$\begin{aligned} {}_7P_4 &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \\ &= 840 \end{aligned}$$

である。したがって、120000の形になるのは840個で、同様にして130000の形になるのも840個となる。139876は130000の形になる数の中で最大であるので、139876は小さい方から数えて

$$840 + 840 = 1680 \text{ 番目}$$

となる。次に、2014番目の数と2015番目の数を求める。いま、130000の形になる数は小さい方から数えて1680番目までを占める。142000の形になる数の個数は

$$\begin{aligned} {}_6P_3 &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \\ &= 120 \end{aligned}$$

であるので、小さい方から数えて

$$1680 + 120 = 1800 \text{ 番目}$$

までを占める。同様にして、143000の形になる数は

$$1800 + 120 = 1920 \text{ 番目}$$

までを占める。したがって、2014番目の数は145000の形である。145200の形になる数の個数は

$$\begin{aligned} {}_5P_2 &= 5 \cdot 4 \\ &= 20 \end{aligned}$$

であるので、小さい方から数えて

$$1920 + 20 = 1940 \text{ 番目}$$

までを占める。同様にして、145300, 145600, 145700の形になる数はそれぞれ

$$1940 + 20 = 1960 \text{ 番目}$$

$$1960 + 20 = 1980 \text{ 番目}$$

$$1980 + 20 = 2000 \text{ 番目}$$

までを占める。したがって、2014番目の数は145800の形である。145820の形になる数は4個あるので、小さい方から数えて

$$2000 + 4 = 2004 \text{ 番目}$$

までを占める。同様にして、145830, 145860の形になる数はそれぞれ

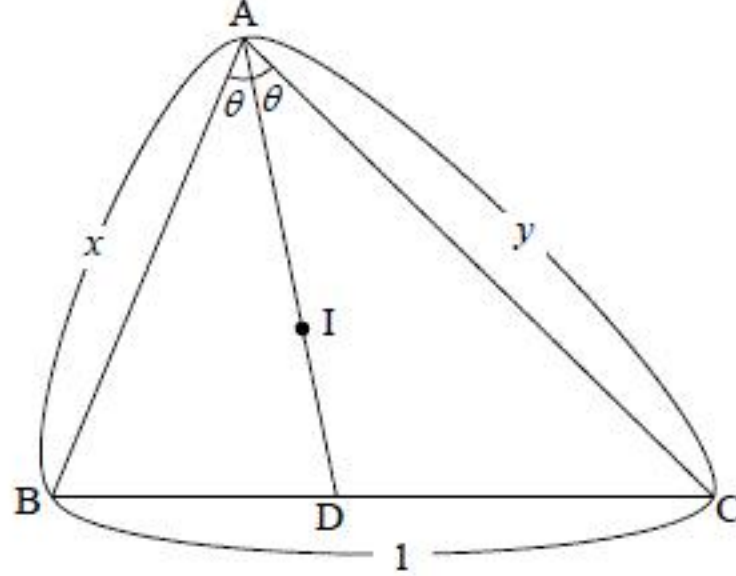
$$2004 + 4 = 2008 \text{ 番目}$$

$$2008 + 4 = 2012 \text{ 番目}$$

番目までを占める。したがって、2013番目の数は145872, 2014番目の数は145873, 2015番目の数は145876となる。

〔Ⅱ〕

(1)



直線 AI は $\angle A$ の 2 等分線であるから、 $BD:DC = AB:AC$ より

$$BD = 1 \times \frac{x}{x+y}$$

$$= \frac{x}{x+y}$$

$$DC = 1 \times \frac{y}{x+y}$$

$$= \frac{y}{x+y}$$

となる。

(答) $BD = \frac{x}{x+y}, \quad DC = \frac{y}{x+y}$

(2)

$\triangle ABD$ について余弦定理より

$$\cos \theta = \frac{x^2 + z^2 - \left(\frac{x}{x+y}\right)^2}{2xz}$$

$$= \frac{(x^2 + z^2)(x+y)^2 - x^2}{2xz(x+y)^2}$$

となる。

(答) $\cos \theta = \frac{(x^2 + z^2)(x+y)^2 - x^2}{2xz(x+y)^2}$

(3)

$x=y$ のとき、 $AB=x, BD=\frac{1}{2}, \angle ADB=90^\circ$ より

$$AD = \sqrt{x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}$$

となる。 $x \neq y$ のとき、 $\triangle ACD$ について余弦定理より

$$\cos \theta = \frac{y^2 + z^2 - \left(\frac{y}{x+y}\right)^2}{2yz}$$

$$= \frac{(y^2 + z^2)(x+y)^2 - y^2}{2yz(x+y)^2}$$

となるので、(2)の結果と比較すると

$$\frac{(x^2 + z^2)(x+y)^2 - x^2}{2xz(x+y)^2} = \frac{(y^2 + z^2)(x+y)^2 - y^2}{2yz(x+y)^2}$$

$$\Leftrightarrow y\{(x^2 + z^2)(x+y)^2 - x^2\} = x\{(y^2 + z^2)(x+y)^2 - y^2\}$$

$$\Leftrightarrow yz^2(x+y)^2 + x^2y\{(x+y)^2 - 1\} = xz^2(x+y)^2 + xy^2\{(x+y)^2 - 1\}$$

$$\Leftrightarrow (y-x)(x+y)^2 z^2 = xy(y-x)\{(x+y)^2 - 1\}$$

$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{xy\{(x+y)^2 - 1\}}{(x+y)^2} (\because x \neq y)$$

$$\therefore z = \frac{\sqrt{xy\{(x+y)^2 - 1\}}}{x+y} (\because z > 0)$$

となる。ただし、 $\triangle ABC$ の成立条件より $x+y > 1$ である。これは $x=y$ の場合も含むので、まとめると

$$AD = \frac{\sqrt{xy\{(x+y)^2 - 1\}}}{x+y}$$

となる。

(答) $AD = \frac{\sqrt{xy\{(x+y)^2 - 1\}}}{x+y}$

(4)

直線 BI は $\angle B$ の 2 等分線であるから、

$$AI:ID = AB:BD$$

$$= x:\frac{x}{x+y}$$

$$= (x+y):1$$

となり、AI は

$$AI = \frac{x+y}{x+y+1} AD$$

$$= \frac{x+y}{x+y+1} \cdot \frac{\sqrt{xy\{(x+y)^2 - 1\}}}{x+y}$$

$$= \frac{\sqrt{xy\{(x+y)^2 - 1\}}}{x+y+1}$$

と表せる。

(答) $AI = \frac{\sqrt{xy\{(x+y)^2 - 1\}}}{x+y+1}$

(5)

$x+y=a$ より

$$AI = \frac{\sqrt{xy\{(x+y)^2 - 1\}}}{x+y+1}$$

$$= \frac{\sqrt{xy(a^2 - 1)}}{a+1}$$

$$= \frac{a-1}{\sqrt{a+1}} \cdot xy (\because a > 1)$$

となる。したがって、 xy が最大となるとき AI も最大となる。ここで、

$$x+y=a$$

$$\Leftrightarrow y=a-x \quad (0 < x < a)$$

であり、 $\triangle ABC$ の成立条件より

$$x+1 > y$$

$$\Leftrightarrow x+1 > a-x$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{a-1}{2}$$

$$y+1 > x$$

$$\Leftrightarrow a-x+1 > x$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{a+1}{2}$$

$$\therefore \frac{a-1}{2} < x < \frac{a+1}{2} (\because a > 1)$$

であるから、

$$xy = x(a-x)$$

$$= -x^2 + ax$$

$$= -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}$$

は $x = \frac{a}{2}$ のとき最大値 $\frac{a^2}{4}$ をとる。このとき

$$AI = \sqrt{\frac{a-1}{a+1} \cdot \frac{a^2}{4}}$$

$$= \frac{a\sqrt{a-1}}{2\sqrt{a+1}}$$

となるので、AI の最大値は $\frac{a\sqrt{a-1}}{2\sqrt{a+1}}$ となる。

(答) $\frac{a\sqrt{a-1}}{2\sqrt{a+1}}$

〔Ⅲ〕〔ア〕

(1)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}}{10}$$

$$= \frac{11}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{10}}{10}$$

$$= \frac{15}{2}$$

$$\bar{z} = 2\bar{x} + 3$$

$$= 14$$

$$\bar{w} = \bar{y} - 4$$

$$= \frac{7}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \bar{x} = \frac{11}{2}, \quad \bar{y} = \frac{15}{2}, \quad \bar{z} = 14, \quad \bar{w} = \frac{7}{2}$$

(2)

$$10(s_x^2 + \bar{x}^2) = 10 \left\{ \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 + \bar{x}^2 \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{10} x_i + 10\bar{x}^2 + 10\bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 2\bar{x} \cdot 10\bar{x} + 20\bar{x}^2$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2$$

となる。また,

$$10(s_{xy} + \bar{x}\bar{y}) = 10 \left\{ \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \bar{x}\bar{y} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{10} x_i y_i - \bar{x} \sum_{i=1}^{10} y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{10} x_i + 10\bar{x}\bar{y} + 10\bar{x}\bar{y}$$

$$= \sum_{i=1}^{10} x_i y_i - \bar{x} \cdot 10\bar{y} - \bar{y} \cdot 10\bar{x} + 20\bar{x}\bar{y}$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{10} y_{10}$$

となる。

(証明終)

(3)

(2)の結果より

$$s_x = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2}{10} - \bar{x}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{385}{10} - \left(\frac{11}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{10}^2}{10} - \bar{y}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{645}{10} - \left(\frac{15}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$s_{xy} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{10} y_{10}}{10} - \bar{x}\bar{y}$$

$$= \frac{445}{10} - \frac{11}{2} \cdot \frac{15}{2}$$

$$= \frac{13}{4}$$

となるので,

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

$$= \frac{\frac{13}{4}}{\frac{\sqrt{33}}{2} \cdot \frac{\sqrt{33}}{2}}$$

$$= \frac{13}{33}$$

となる。また,

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{10}^2 = \sum_{i=1}^{10} (2x_i + 3)^2$$

$$= 4 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 + 12 \sum_{i=1}^{10} x_i + 90$$

$$= 4 \cdot 385 + 12 \cdot 55 + 90$$

$$= 2290$$

$$w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_{10}^2 = \sum_{i=1}^{10} (y_i - 4)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 8 \sum_{i=1}^{10} y_i + 160$$

$$= 645 - 8 \cdot 75 + 160$$

$$= 205$$

$$z_1 w_1 + z_2 w_2 + \cdots + z_{10} w_{10} = \sum_{i=1}^{10} (2x_i + 3)(y_i - 4)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 8 \sum_{i=1}^{10} x_i + 3 \sum_{i=1}^{10} y_i - 120$$

$$= 2 \cdot 445 - 8 \cdot 55 + 3 \cdot 75 - 120$$

$$= 555$$

となるので、同様にして

$$s_z = \sqrt{\frac{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{10}^2}{10} - \bar{z}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2290}{10} - 14^2}$$

$$= \sqrt{33}$$

$$s_w = \sqrt{\frac{w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_{10}^2}{10} - \bar{w}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{205}{10} - \left(\frac{7}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$s_{zw} = \frac{z_1 w_1 + z_2 w_2 + \cdots + z_{10} w_{10}}{10} - \bar{z}\bar{w}$$

$$= \frac{555}{10} - 14 \cdot \frac{7}{2}$$

$$= \frac{13}{2}$$

となる。よって,

$$r_{zw} = \frac{s_{zw}}{s_z s_w}$$

$$= \frac{\frac{13}{2}}{\sqrt{33} \cdot \frac{\sqrt{33}}{2}}$$

$$= \frac{13}{33}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s_{xy} = \frac{13}{4}, \quad r_{xy} = \frac{13}{33}, \quad s_{zw} = \frac{13}{2}, \quad r_{zw} = \frac{13}{33}$$

〔Ⅲ〕〔イ〕

(1)

$$V(x, y) = \sum_{i=1}^n L_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^n \left\{ (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2x \sum_{i=1}^n x_i + nx^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2y \sum_{i=1}^n y_i + ny^2$$

$$= q - 2xp + nx^2 + t - 2ys + ny^2$$

$$= n \left(x - \frac{p}{n} \right)^2 + n \left(y - \frac{s}{n} \right)^2 + q + t - \frac{p^2 + s^2}{n}$$

となるので、 $V(x, y)$ は $(x, y) = \left(\frac{p}{n}, \frac{s}{n} \right)$ のとき最小値 $q + t - \frac{p^2 + s^2}{n}$ をとる。よって

$$a = \frac{p}{n}, \quad b = \frac{s}{n}, \quad v = q + t - \frac{p^2 + s^2}{n}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{p}{n}, \quad b = \frac{s}{n}, \quad v = q + t - \frac{p^2 + s^2}{n}$$

(2)

$$\sum_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n (2x_i + 3)$$

$$= 2p + 3n$$

$$\sum_{i=1}^n z_i^2 = \sum_{i=1}^n (2x_i + 3)^2$$

$$= 4q + 12p + 9n$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n (y_i - 4)$$

$$= s - 4n$$

$$\sum_{i=1}^n w_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - 4)^2$$

$$= t - 8s + 16n$$

より

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^n K_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^n \left\{ (z_i - x)^2 + (w_i - y)^2 \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^n z_i^2 - 2x \sum_{i=1}^n z_i + nx^2 + \sum_{i=1}^n w_i^2 - 2y \sum_{i=1}^n w_i + ny^2$$

$$= (4q + 12p + 9n) - 2x(2p + 3n) + nx^2 + (t - 8s + 16n) - 2y(s - 4n) + ny^2$$

$$= n \left(x - \frac{2p + 3n}{n} \right)^2 + n \left(y - \frac{s - 4n}{n} \right)^2 + 4q + t - \frac{4p^2 + s^2}{n}$$

となるので、 $W(x, y)$ は $(x, y) = \left(\frac{2p + 3n}{n}, \frac{s - 4n}{n} \right)$ のとき最小値 $4q + t - \frac{4p^2 + s^2}{n}$ をとる。よつ

て,

$$c = \frac{2p + 3n}{n}, \quad d = \frac{s - 4n}{n}, \quad w = 4q + t - \frac{4p^2 + s^2}{n}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c = \frac{2p + 3n}{n}, \quad d = \frac{s - 4n}{n}, \quad w = 4q + t - \frac{4p^2 + s^2}{n}$$