

〔Ⅰ〕

〔解答〕

ア 4 イ 2 ウ -2 エ -1 オ $\frac{\pi}{4}$

カ $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$ キ 3 ク 0 ケ $\frac{-1+\sqrt{7}}{6}$ コ $-\frac{17+7\sqrt{7}}{27}$

〔解説〕

$$\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$

であるから

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \cos 3\theta + \cos 2\theta + \cos \theta \\ &= (4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) + (2\cos^2 \theta - 1) + \cos \theta \\ &= 4\cos^3 \theta + 2\cos^2 \theta - 2\cos \theta - 1 \end{aligned}$$

となる。 $t = \cos \theta$ とおき、 $f(\theta)$ を t の 3 次式 $g(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ として表したとき

$$a = 4, b = 2, c = -2, d = -1$$

となる。また、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ であるとき $0 \leq t \leq 1$ であり、 θ と t の値は 1 対 1 対応する。ここで

$$\begin{aligned} g(t) &= 4t^3 + 2t^2 - 2t - 1 \\ &= (2t+1)(\sqrt{2}t+1)(\sqrt{2}t-1) \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} g(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because 0 \leq t \leq 1) \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} g(t) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < t &\leq 1 \quad (\because 0 \leq t \leq 1) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} f(\theta) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < \cos \theta &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \theta < \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。さらに

$$\begin{aligned} g'(t) &= 12t^2 + 4t - 2 \\ &= 2(6t^2 + 2t - 1) \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6t^2 + 2t - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{6} \end{aligned}$$

であり、これより $0 \leq t \leq 1$ における関数 $g(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{-1+\sqrt{7}}{6}$	...	1
$g'(t)$	-	-	0	+	+
$g(t)$	-1	$\searrow$		$\nearrow$	3

さらに、 $t = \frac{-1+\sqrt{7}}{6}$ のとき $6t^2 + 2t - 1 = 0$ を満たし

$$\begin{aligned} g(t) &= 4t^3 + 2t^2 - 2t - 1 \\ &= \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{9}\right)(6t^2 + 2t - 1) - \frac{2}{9}(7t + 4) \end{aligned}$$

であることより

$$\begin{aligned} g\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}\right) &= -\frac{2}{9}\left(7 \cdot \frac{-1+\sqrt{7}}{6} + 4\right) \\ &= -\frac{17+7\sqrt{7}}{27} \end{aligned}$$

となる。以上より、 $f(\theta) (= g(t))$ は

$t = 1$ つまり $\theta = 0$ のとき最大値 3

$$t = \frac{-1+\sqrt{7}}{6} \text{ つまり } \cos \theta = \frac{-1+\sqrt{7}}{6} \text{ のとき最小値 } -\frac{17+7\sqrt{7}}{27}$$

をとる。

〔Ⅱ〕

(1)

$$a_1 = r, a_2 = 1+r, a_{n+2} = \frac{1+a_{n+1}}{a_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

であるとき

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1+a_2}{a_1} \\ &= \frac{2+r}{r} \\ &= 1 + \frac{2}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{1+a_3}{a_2} \\ &= \frac{1+\left(1+\frac{2}{r}\right)}{1+r} \\ &= \frac{2(1+r)}{r(1+r)} \\ &= \frac{2}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{1+a_4}{a_3} \\ &= \frac{1+\frac{2}{r}}{1+\frac{2}{r}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_6 &= \frac{1+a_5}{a_4} \\ &= \frac{1+1}{\frac{2}{r}} \\ &= r \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_3 = 1 + \frac{2}{r}, a_4 = \frac{2}{r}, a_5 = 1, a_6 = r$$

(2)

(1)の結果に加えて

$$\begin{aligned} a_7 &= \frac{1+a_6}{a_5} \\ &= \frac{1+r}{1} \\ &= 1+r \end{aligned}$$

であるから

$$a_6 = a_1, a_7 = a_2$$

となる。数列 $\{a_n\}$ は隣接3項間漸化式で定義されていることから、帰納的に考えて

$$a_n = \begin{cases} a_1 = r & (n \equiv 1 \pmod{5} \text{ のとき}) \\ a_2 = 1+r & (n \equiv 2 \pmod{5} \text{ のとき}) \\ a_3 = 1 + \frac{2}{r} & (n \equiv 3 \pmod{5} \text{ のとき}) \\ a_4 = \frac{2}{r} & (n \equiv 4 \pmod{5} \text{ のとき}) \\ a_5 = 1 & (n \equiv 0 \pmod{5} \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \begin{cases} a_1 = r & (n \equiv 1 \pmod{5} \text{ のとき}) \\ a_2 = 1+r & (n \equiv 2 \pmod{5} \text{ のとき}) \\ a_3 = 1 + \frac{2}{r} & (n \equiv 3 \pmod{5} \text{ のとき}) \\ a_4 = \frac{2}{r} & (n \equiv 4 \pmod{5} \text{ のとき}) \\ a_5 = 1 & (n \equiv 0 \pmod{5} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3)

数列 $\{a_n\}$ の初項から第5項までの和を S_1 とおくと、(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ &= r + (1+r) + \left(1 + \frac{2}{r}\right) + \frac{2}{r} + 1 \\ &= \frac{1}{r}(2r^2 + 3r + 4) \end{aligned}$$

となる。よって、 $2015 = 403 \times 5$ であることと数列 $\{a_n\}$ の周期性から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2015} a_k &= 403S_1 \\ &= \frac{403}{r}(2r^2 + 3r + 4) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^{2015} a_k = \frac{403}{r}(2r^2 + 3r + 4)$$

(4)

$2015 = 403 \times 5$ であることと数列 $\{a_n\}$ の周期性から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2015} r^{k-1} a_k &= \sum_{m=1}^{403} r^{5m-5} a_{5m-4} + \sum_{m=1}^{403} r^{5m-4} a_{5m-3} + \sum_{m=1}^{403} r^{5m-3} a_{5m-2} + \sum_{m=1}^{403} r^{5m-2} a_{5m-1} + \sum_{m=1}^{403} r^{5m-1} a_{5m} \\ &= \sum_{m=1}^{403} r^{5(m-1)} (a_{5m-4} + r a_{5m-3} + r^2 a_{5m-2} + r^3 a_{5m-1} + r^4 a_{5m}) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $S_2 = a_1 + r a_2 + r^2 a_3 + r^3 a_4 + r^4 a_5$ とおくと

$$\begin{aligned} S_2 &= r + r(1+r) + r^2 \left(1 + \frac{2}{r}\right) + r^3 \cdot \frac{2}{r} + r^4 \cdot 1 \\ &= r(r^3 + 4r + 4) \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2015} r^{k-1} a_k &= \sum_{m=1}^{403} r^{5(m-1)} S_2 \\ &= S_2 \sum_{m=1}^{403} r^{5(m-1)} \\ &= S_2 \cdot \frac{r^{5 \cdot 403} - 1}{r^5 - 1} \quad (\because r \neq 1) \\ &= \frac{r(r^3 + 4r + 4)(r^{2015} - 1)}{r^5 - 1} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^{2015} r^{k-1} a_k = \frac{r(r^3 + 4r + 4)(r^{2015} - 1)}{r^5 - 1}$$

〔Ⅲ〕

(1)

区別のない 10 個の玉を区別のない 3 個の箱に入れるときの入れ方の総数は、10 個の玉を 3 組に分ける分け方の総数に一致し、その分け方は

$$(1, 1, 8), (1, 2, 7), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4)$$

の場合があるから、求める玉の入れ方の総数は 8 通りである。

(答) 8 通り

(2)

区別のない 10 個の玉を区別のある 3 個の箱に入れるときの入れ方の総数は、(1)において 3 組に分けた玉を区別のある 3 個の箱に割り当てる場合の数に一致する。

[1] (1, 2, 7), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 3, 5) と分けるとき

このとき、3 個の箱に割り当てる場合の数は、各組に対してそれぞれ

$$3! = 6 \text{ 通り}$$

ある。

[2] (1, 1, 8), (2, 2, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 4) と分けるとき

このとき、3 個の箱に割り当てる場合の数は、各組に対してそれぞれ

$${}_3C_2 = 3 \text{ 通り}$$

ある。

以上、[1], [2] の場合は互いに排反であるから、求める玉の入れ方の総数は

$$6 \times 4 + 3 \times 4 = 36 \text{ 通り}$$

である。

(答) 36 通り

(3)

区別のある 10 個の玉を区別のある 3 個の箱があり、2 つの箱に 4 個ずつ、残り 1 つの箱に 2 個の玉を入れるときの入れ方の総数は

$${}_{10}C_4 \times {}_6C_4 \times {}_2C_2 = 3150 \text{ 通り}$$

ある。このもとで、箱の区別をなくしたとき、4 個の玉が入る箱の間の入れ替えを考慮して、求める場合の数は

$$\frac{3150}{2} = 1575 \text{ 通り}$$

である。

(答) 1575 通り

(4)

[1] 区別のある 1 つの箱に 2 個の玉が入るとき

区別のある 10 個の玉を区別のある 3 個の箱があり、2 つの箱に 4 個ずつ、残り 1 つの箱に 2 個の玉を入れるときの入れ方の総数は

$${}_{10}C_4 \times {}_6C_4 \times {}_2C_2 = 3150 \text{ 通り}$$

ある。このもとで、4 個の玉が入る箱の間の区別をなくしたとき、この間の入れ替えを考慮すると、このときの玉の入れ方は

$$\frac{3150}{2} = 1575 \text{ 通り}$$

となる。

[2] 区別のある 1 つの箱に 4 個の玉が入るとき

区別のある 10 個の玉を区別のある 3 個の箱があり、2 つの箱に 4 個ずつ、残り 1 つの箱に 2 個の玉を入れるときの入れ方の総数は

$${}_{10}C_4 \times {}_6C_4 \times {}_2C_2 = 3150 \text{ 通り}$$

ある。このもとで、4 個の玉が入る箱と 2 個の玉が入る箱の間の区別をなくしたときも、この 2 つの箱に入る玉の数が異なることから、これらの箱の間の区別はできるため、このときの玉の入れ方は 3150 通りとなる。

以上、[1], [2] の場合は互いに排反であることから、求める玉の入れ方の総数は

$$1575 + 3150 = 4725 \text{ 通り}$$

である。

(答) 4725 通り