

【I】

[解答]

ア $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ イ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ウ $1-\alpha$

エ β オ $\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}$ カ 2

キ 18 ク 1 ケ 1

コ $(-1)^n$

[解説]

漸化式 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ の特性方程式を解くと、

$$\begin{aligned}x^2-x-1&=0 \\ \Leftrightarrow x&=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 、 $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ とすると、

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

が成り立つ。ここで、

$$b_n=a_{n+1}-\alpha a_n$$

と定めると、 b_n は初項 $a_2-\alpha a_1$ 、公比 β の等比数列となる。よって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}b_n&=\beta^{n-1}\cdot(a_2-\alpha a_1) \\ &=(1-\alpha)\beta^{n-1}\end{aligned}$$

と表され、

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(1-\alpha)\beta^{n-1} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、漸化式について、

$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$$

も成り立つことから、

$$c_n=a_{n+1}-\beta a_n$$

と定めると、数列 c_n の一般項は

$$\begin{aligned}c_n&=\alpha^{n-1}\cdot(a_2-\beta a_1) \\ &=(1-\beta)\alpha^{n-1}\end{aligned}$$

と表され、

$$a_{n+1}-\beta a_n=(1-\beta)\alpha^{n-1} \qquad \cdots \textcircled{2}$$

である。よって、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の辺同士の差をとると数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)a_n&=(1-\beta)\alpha^{n-1}-(1-\alpha)\beta^{n-1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{5}a_n&=\alpha^n-\beta^n \left(\because \alpha+\beta=1, \alpha-\beta=\sqrt{5} \right) \\ \therefore a_n&=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

と表せる。また、 $1+\sum_{k=1}^na_k$ は、

$$\begin{aligned}1+\sum_{k=1}^na_k&=1+\sum_{k=1}^n(a_{k+2}-a_{k+1}) \\ &=1+a_{n+2}-a_2 \\ &=a_{n+2}\end{aligned}$$

と整理できる。よって $1+\sum_{k=1}^na_k=a_p$ となるのは $p=n+2$ のときである。ここで a_n を順次計算

していくと、

$$\begin{aligned}a_{11}&=89 \\ a_{12}&=144 \\ a_{13}&=233 \\ a_{14}&=377 \\ a_{15}&=610 \\ a_{16}&=987 \\ a_{17}&=1597 \\ a_{18}&=2584\end{aligned}$$

となる。よって、 a_n がはじめて 2015 より大きくなるのは $n=18$ のときである。 n が 3 より大きい正の奇数の場合、 $n=2j+1$ と表すと、

$$\begin{aligned}a_n-\sum_{k=1}^ja_{2k}&=a_{2j+1}-\sum_{k=2}^j(a_{2k-1}+a_{2k-2})-a_2 \\ &=a_{2j+1}-\left(\sum_{k=1}^{2j-1}a_k-a_1\right)-1 \\ &=a_{2j+1}-\{(a_{2j+1}-1)-1\}-1 \\ &=1\end{aligned}$$

と与式を計算できる。 n が 4 より大きい正の偶数の場合、 $n=2j$ と表すと、

$$\begin{aligned}a_n-\sum_{k=2}^ja_{2k-1}&=a_{2j}-\sum_{k=2}^j(a_{2k-2}+a_{2k-3}) \\ &=a_{2j}-\sum_{k=1}^{2j-2}a_k \\ &=a_{2j}-(a_{2j}-1) \\ &=1\end{aligned}$$

と与式を計算できる。また $n>1$ の場合、 $a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2=f_n$ とおくと、

$$\begin{aligned}f_n&=a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2 \\ &=(a_n+a_{n-1})\cdot a_{n-1}-a_n^2 \\ &=-a_n\cdot(a_n-a_{n-1})+a_{n-1}^2 \\ &=-(a_na_{n-2}-a_{n-1}^2) \\ &=-f_{n-1}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}f_2&=a_3\cdot a_1-a_2^2 \\ &=2\cdot 1-1^2 \\ &=1\end{aligned}$$

より、 $n>1$ では

$$\begin{aligned}f_n&=(-1)^{n-2}\cdot f_2 \\ &=(-1)^n\end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

$$f(x) = x^2 - (1+a)x + a \text{ は,}$$

$$x^2 - (1+a)x + a = (x-a)(x-1)$$

と因数分解できる。いま $a < 0$ だから、 $a < x < 1$ で $f(x) < 0$ である。よって $I(a)$ は、

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^1 |f(x)| \\ &= -\int_0^1 \{x^2 - (1+a)x + a\} dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1+a}{2}x^2 + ax \right]_0^1 \\ &= \frac{1-3a}{6} \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad I(a) = \frac{1-3a}{6}$$

(2)

$0 \leq a \leq 1$ より、 $0 \leq x \leq a$ で $f(x) \geq 0$ 、 $a \leq x \leq 1$ で $f(x) \leq 0$ となる。よって $I(a)$ は、

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^1 |f(x)| \\ &= \int_0^a \{x^2 - (1+a)x + a\} dx - \int_a^1 \{x^2 - (1+a)x + a\} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1+a}{2}x^2 + ax \right]_0^a - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1+a}{2}x^2 + ax \right]_a^1 \\ &= -\frac{a^3}{3} + a^2 - \frac{a}{2} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad I(a) = -\frac{a^3}{3} + a^2 - \frac{a}{2} + \frac{1}{6}$$

(3)

$a > 1$ より $0 \leq x \leq 1$ で $f(x) \geq 0$ となる。よって $I(a)$ は、

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^1 |f(x)| \\ &= \int_0^1 \{x^2 - (1+a)x + a\} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1+a}{2}x^2 + ax \right]_0^1 \\ &= \frac{3a-1}{6} \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad I(a) = \frac{3a-1}{6}$$

(4)

$0 \leq a \leq 1$ のとき、(2)の結果より $I(a)$ を a で微分すると、

$$\begin{aligned} I'(a) &= -a^2 + 2a - \frac{1}{2} \\ &= -\left\{ a - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} \left\{ a - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

と因数分解できる。よって $0 \leq a \leq 1$ における増減表は以下の通りとなる。

a	0	...	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	...	1
$I'(a)$		-	0	+	
$I(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$a = 0, 1, \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ における $I(a)$ の値を計算すると、

$$I(0) = \frac{1}{6}$$

$$I(1) = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} I\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) &= -\frac{1}{3}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{6} \\ &= \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{6}(2-\sqrt{2}) \right\} - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{6-4\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4+\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

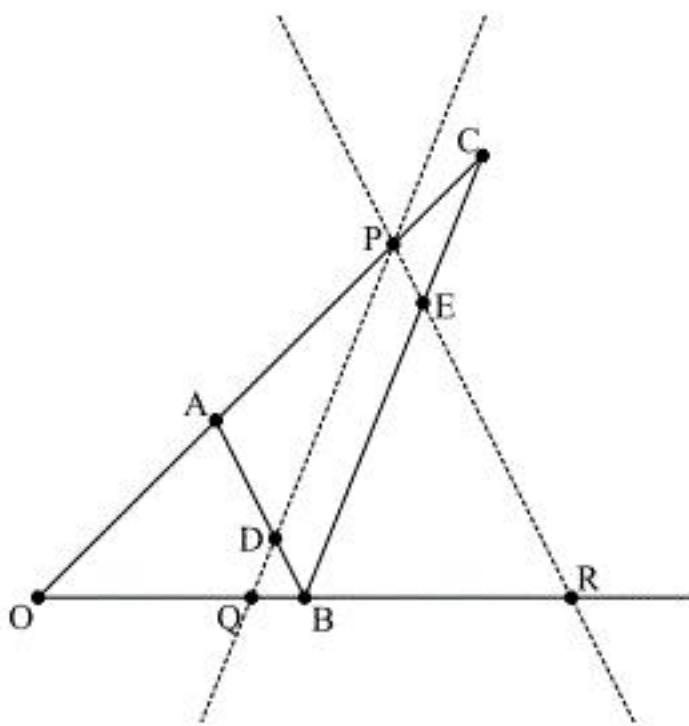
となる。よってこの範囲における $I(a)$ の最大値は $\frac{1}{3}$ 、最小値は $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$ である。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値} \frac{1}{3}, \text{最小値} \frac{2-\sqrt{2}}{6}$$

【Ⅲ】

(1)

各点の位置関係は下図の通りとなる。



AB//PR, PQ//CB より

$$OA:OP=OB:OR$$

$$OP:OC=OQ:OB$$

が成り立つ。よって $OP:OC=p:k$ より

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{p}{k} \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OR} = p\vec{b}$$

と表せる。これらを用いることで、 $\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{CR}$ はそれぞれ

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA}$$

$$= -\vec{a} + \frac{p}{k} \vec{b}$$

$$\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OC}$$

$$= -k\vec{a} + p\vec{b}$$

と表せる。

$$(答) \quad \overrightarrow{AQ} = -\vec{a} + \frac{p}{k} \vec{b}, \quad \overrightarrow{CR} = -k\vec{a} + p\vec{b}$$

(2)

PQ//CB であるから、(1)の図より $\triangle ABC$ と $\triangle ADP$ は相似である。このとき、

$$AD:DB=AP:PC$$

$$=(p-1):(k-p)$$

であるから、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{k-p}{k-1} \vec{a} + \frac{p-1}{k-1} \vec{b}$$

と表せる。また、AB//PR, PQ//CB より四角形 DBEP は平行四辺形であるから、

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DP}$$

$$= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OD}$$

$$= p\vec{a} - \left(\frac{k-p}{k-1} \vec{a} + \frac{p-1}{k-1} \vec{b} \right)$$

$$= \frac{k(p-1)}{k-1} \vec{a} - \frac{p-1}{k-1} \vec{b}$$

より、

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE}$$

$$= \vec{b} + \left(\frac{k(p-1)}{k-1} \vec{a} - \frac{p-1}{k-1} \vec{b} \right)$$

$$= \frac{k(p-1)}{k-1} \vec{a} + \frac{k-p}{k-1} \vec{b}$$

と表せる。

$$(答) \quad \overrightarrow{OD} = \frac{k-p}{k-1} \vec{a} + \frac{p-1}{k-1} \vec{b}, \quad \overrightarrow{OE} = \frac{k(p-1)}{k-1} \vec{a} + \frac{k-p}{k-1} \vec{b}$$

(3)

三角形の面積公式より、

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

と表せる。

$$(答) \quad S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

(4)

OA:AP=1:(p-1) より、 $\triangle ABP$ の面積 S_{ABP} は

$$S_{ABP} = (p-1)S$$

と表され、AB//PR より $\triangle ABE$ の面積 S_{ABE} も

$$S_{ABE} = S_{ABP}$$

$$= (p-1)S$$

と表される。AD:DB=(p-1):(k-1) であるから、 $\triangle BDE$ の面積 T は

$$T = \frac{DB}{AB} \cdot S_{ABE}$$

$$= \frac{k-p}{k-1} \cdot (p-1)S$$

$$= \frac{-p^2 + (k+1)p - k}{k-1} S$$

と表せる。点Pが線分AC上を動くとき $1 \leq p \leq k$ $k > 1$ となるので、

$$T = \frac{-p^2 + (k+1)p - k}{k-1} S$$

$$= \frac{1}{k-1} \left\{ -\left(p - \frac{k+1}{2} \right)^2 + \left(\frac{k+1}{2} \right)^2 - k \right\} S$$

$$= \frac{1}{k-1} \left\{ -\left(p - \frac{k+1}{2} \right)^2 + \frac{(k-1)^2}{4} \right\} S$$

について、 $1 \leq \frac{k+1}{2} \leq k$ となることから、 T は $p = \frac{k+1}{2}$ のとき最大値

$$T = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{(k-1)^2}{4} S$$

$$= \frac{k-1}{4} S$$

をとる。

$$(答) \quad T = \frac{-p^2 + (k+1)p - k}{k-1} S, \text{ 最大値: } \frac{k-1}{4} S \left(p = \frac{k+1}{2} \right)$$

(5)

直線DEが点Oを通るとき、実数 s を用いて、

$$\overrightarrow{OE} = s\overrightarrow{OD}$$

と表せる。よって(2)の結果から、

$$\overrightarrow{OE} = s\overrightarrow{OD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(p-1)}{k-1} \vec{a} + \frac{k-p}{k-1} \vec{b} = s \left(\frac{k-p}{k-1} \vec{a} + \frac{p-1}{k-1} \vec{b} \right)$$

が成り立つ。 $\vec{a}, \vec{b}$ が1次独立であることから、

$$\begin{cases} k(p-1) = s(k-p) \\ k-p = s(p-1) \end{cases}$$

が得られるため、2式から s を消去することで、 p は

$$\frac{k(p-1)}{k-p} = \frac{k-p}{p-1}$$

$$\Leftrightarrow k(p-1)^2 = (k-p)^2$$

$$\Leftrightarrow (k-1)p^2 = k^2 - k$$

$$\Leftrightarrow p^2 = k \quad (\because k > 1)$$

$$\therefore p = \sqrt{k}$$

と表せる。

$$(答) \quad p = \sqrt{k}$$