

【Ⅰ】

〔解答〕

|     |    |                |                      |
|-----|----|----------------|----------------------|
|     | ア  | イ              | ウ                    |
| (1) | 33 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{133n-n^2}{4}$ |

|     |                     |                      |                                      |
|-----|---------------------|----------------------|--------------------------------------|
|     | エ                   | オ                    | カ                                    |
| (2) | $\frac{5}{6\log 2}$ | $\frac{27}{4\log 2}$ | $\frac{24\log 2-1}{18(\log 2)^2}\pi$ |

|     |                               |                                |                  |       |
|-----|-------------------------------|--------------------------------|------------------|-------|
|     | キ                             | ク                              | ケ                | コ     |
| (3) | $2x-3y\sin\theta=6\cos\theta$ | $3x\sin\theta+2y=13\tan\theta$ | $X>\frac{13}{3}$ | $Y>0$ |

〔解説〕

(1) 初項が  $a_1$  で公差が  $d$  である等差数列  $\{a_n\}$  の一般項は、

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

と表される。従って、題意より、

$$\begin{cases} a_{27} = 20 \\ a_{37} = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 26d = 20 \\ a_1 + 36d = 15 \end{cases}$$

$$\therefore a_1 = 33, d = -\frac{1}{2}$$

を得る。これより、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ &= \frac{67}{2} - \frac{1}{2}n \end{aligned}$$

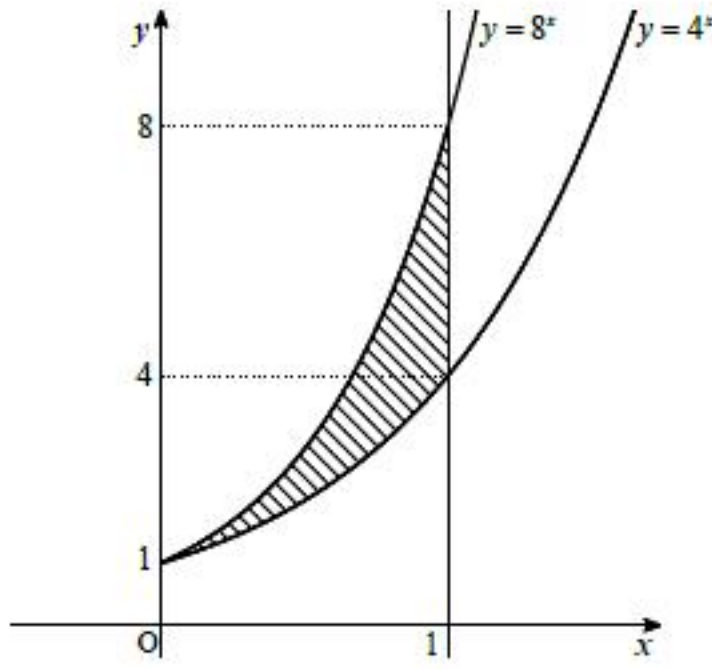
であるから、

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{67}{2} - \frac{1}{2}k \right) \\ &= \frac{67}{2}n - \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{133n-n^2}{4} \end{aligned}$$

と求めることができる。

(2)

題意より、領域  $D$  は以下の斜線部である。



図より、 $D$  の面積を  $S$ 、 $D$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を  $V_1$  とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (8^x - 4^x) dx \\ &= \left[ \frac{8^x}{\log 8} - \frac{4^x}{\log 4} \right]_0^1 \\ &= \frac{8-1}{3\log 2} - \frac{4-1}{2\log 2} \\ &= \frac{5}{6\log 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^1 \left\{ (8^x)^2 - (4^x)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_0^1 (64^x - 16^x) dx \\ &= \pi \left[ \frac{64^x}{\log 64} - \frac{16^x}{\log 16} \right]_0^1 \\ &= \pi \left( \frac{64-1}{6\log 2} - \frac{16-1}{4\log 2} \right) \\ &= \frac{27}{4\log 2} \pi \end{aligned}$$

と求めることができる。また、

$$\begin{aligned} y &= 4^x \\ \Leftrightarrow \log y &= x \log 4 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\log y}{2\log 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 8^x \\ \Leftrightarrow \log y &= x \log 8 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\log y}{3\log 2} \end{aligned}$$

が成り立つので、 $D$  を  $y$  軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を  $V_2$  とすると、

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_1^4 \left( \frac{\log y}{2\log 2} \right)^2 dy + \pi \cdot 1^2 \cdot (8-4) - \pi \int_1^8 \left( \frac{\log y}{3\log 2} \right)^2 dy \\ &= \frac{\pi}{4(\log 2)^2} \int_1^4 (\log y)^2 dy + 4\pi - \frac{\pi}{9(\log 2)^2} \int_1^8 (\log y)^2 dy \end{aligned}$$

と表される。ここで、 $C$  を積分定数とすると、部分積分法より、

$$\begin{aligned} \int (\log y)^2 dy &= \int y' (\log y)^2 dy \\ &= y (\log y)^2 - \int y \{ (\log y)^2 \}' dy \\ &= y (\log y)^2 - \int y \cdot \frac{2 \log y}{y} dy \\ &= y (\log y)^2 - 2 \int \log y dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \log y dy &= \int y' \log y dy \\ &= y \log y - \int y (\log y)' dy \\ &= y \log y - y + C \end{aligned}$$

$$\therefore \int (\log y)^2 dy = y (\log y)^2 - 2y \log y + 2y + C$$

となるので、

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\pi}{4(\log 2)^2} \int_1^4 (\log y)^2 dy - \frac{\pi}{9(\log 2)^2} \int_1^8 (\log y)^2 dy + \pi \int_4^8 dy \\ &= \frac{\pi}{4(\log 2)^2} \left[ y (\log y)^2 - 2y \log y + 2y \right]_1^4 + 4\pi - \frac{\pi}{9(\log 2)^2} \left[ y (\log y)^2 - 2y \log y + 2y \right]_1^8 \\ &= \frac{\pi}{4(\log 2)^2} \{ 16(\log 2)^2 - 16\log 2 + 6 \} + 4\pi - \frac{\pi}{9(\log 2)^2} \{ 72(\log 2)^2 - 48\log 2 + 14 \} \\ &= \left\{ 4 - \frac{4}{\log 2} + \frac{3}{2(\log 2)^2} \right\} \pi + 4\pi - \left\{ 8 - \frac{16}{3\log 2} + \frac{14}{9(\log 2)^2} \right\} \pi \\ &= \left\{ \frac{4}{3\log 2} - \frac{1}{18(\log 2)^2} \right\} \pi \\ &= \frac{24\log 2 - 1}{18(\log 2)^2} \pi \end{aligned}$$

と計算できる。

(3)

双曲線  $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  上の点  $P\left(\frac{3}{\cos\theta}, 2\tan\theta\right)$  における接線  $\ell$  の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{3}{\cos\theta} \cdot \frac{x}{9} - 2\tan\theta \cdot \frac{y}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow 2x - 3y\sin\theta &= 6\cos\theta \end{aligned}$$

であるから、法線  $m$  の方程式は、

$$\begin{aligned} 3\sin\theta \cdot \left( x - \frac{3}{\cos\theta} \right) + 2 \cdot (y - 2\tan\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x\sin\theta + 2y &= 13\tan\theta \end{aligned}$$

である。 $m$  と  $x$  軸との交点  $(X, 0)$  について、

$$\begin{aligned} 3X\sin\theta &= 13\tan\theta \\ \Leftrightarrow X &= \frac{13\tan\theta}{3\sin\theta} \left( \because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \\ \Leftrightarrow X &= \frac{13}{3\cos\theta} \end{aligned}$$

となるので、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  より

$$\begin{aligned} 0 &< \cos\theta < 1 \\ \Leftrightarrow 1 &< \frac{1}{\cos\theta} \\ \therefore X &= \frac{13}{3\cos\theta} > \frac{13}{3} \end{aligned}$$

を得る。同様に、 $m$  と  $y$  軸との交点  $(0, Y)$  について、

$$\begin{aligned} 2Y &= 13\tan\theta \\ \Leftrightarrow Y &= \frac{13}{2}\tan\theta \end{aligned}$$

となるので、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  より

$$\begin{aligned} 0 &< \tan\theta \\ \therefore Y &= \frac{13}{2}\tan\theta > 0 \end{aligned}$$

を得る。

〔Ⅱ〕

(1)

$$\begin{aligned}\{a \cos(\pi \log x) + b \sin(\pi \log x)\}' &= a(\pi \log x)' \{-\sin(\pi \log x)\} + b(\pi \log x)' \cos(\pi \log x) \\ &= \frac{\pi}{x} \{-a \sin(\pi \log x) + b \cos(\pi \log x)\}\end{aligned}$$

が成り立つので、与えられた関数  $f(x)$  は

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x^{n+1})' \{a \cos(\pi \log x) + b \sin(\pi \log x)\} + x^{n+1} \{a \cos(\pi \log x) + b \sin(\pi \log x)\}' \\ &= (n+1)x^n \{a \cos(\pi \log x) + b \sin(\pi \log x)\} + \pi x^n \{-a \sin(\pi \log x) + b \cos(\pi \log x)\} \\ &= \{a(n+1) + b\pi\}x^n \cos(\pi \log x) + \{b(n+1) - a\pi\}x^n \sin(\pi \log x)\end{aligned}$$

と微分することができる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \{a(n+1) + b\pi\}x^n \cos(\pi \log x) + \{b(n+1) - a\pi\}x^n \sin(\pi \log x)$$

(2)

(1)の結果より、 $a=1, b=0$  のとき

$$\begin{aligned}f'(x) &= (n+1)x^n \cos(\pi \log x) - \pi x^n \sin(\pi \log x) \\ \Leftrightarrow \{x^{n+1} \cos(\pi \log x)\}' &= (n+1)x^n \cos(\pi \log x) - \pi x^n \sin(\pi \log x)\end{aligned}$$

であるから、両辺を積分して

$$\begin{aligned}\left[x^{n+1} \cos(\pi \log x)\right]_1^e &= \int_1^e (n+1)x^n \cos(\pi \log x) dx - \int_1^e \pi x^n \sin(\pi \log x) dx \\ \Leftrightarrow (e^{n+1} \cos \pi - \cos 0) &= (n+1)I_n - \pi J_n \\ \Leftrightarrow -e^{n+1} - 1 &= (n+1)I_n - \pi J_n \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ。また、 $a=0, b=1$  のとき

$$\begin{aligned}f'(x) &= \pi x^n \cos(\pi \log x) + (n+1)x^n \sin(\pi \log x) \\ \Leftrightarrow \{x^{n+1} \sin(\pi \log x)\}' &= \pi x^n \cos(\pi \log x) + (n+1)x^n \sin(\pi \log x)\end{aligned}$$

であるから、両辺を積分して

$$\begin{aligned}\left[x^{n+1} \sin(\pi \log x)\right]_1^e &= \pi \int_1^e x^n \cos(\pi \log x) dx + (n+1) \int_1^e x^n \sin(\pi \log x) dx \\ \Leftrightarrow (e^{n+1} \sin \pi - \sin 0) &= \pi I_n + (n+1)J_n \\ \Leftrightarrow 0 &= \pi I_n + (n+1)J_n \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、①と②より

$$\begin{aligned}I_n &= -\frac{(n+1)(e^{n+1} + 1)}{(n+1)^2 + \pi^2} \\ J_n &= \frac{\pi(e^{n+1} + 1)}{(n+1)^2 + \pi^2}\end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad I_n = -\frac{(n+1)(e^{n+1} + 1)}{(n+1)^2 + \pi^2}, \quad J_n = \frac{\pi(e^{n+1} + 1)}{(n+1)^2 + \pi^2}$$

(3)

(2)の結果より

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{(n+2)(e^{n+2} + 1)}{(n+2)^2 + \pi^2} \right\} \cdot \left\{ -\frac{(n+1)^2 + \pi^2}{(n+1)(e^{n+1} + 1)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^2 + \pi^2}{(n+2)^2 + \pi^2} \cdot \frac{e^{n+2} + 1}{e^{n+1} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{\pi^2}{n^2}}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \frac{\pi^2}{n^2}} \cdot \frac{e + \frac{1}{e^{n+1}}}{1 + \frac{1}{e^{n+1}}} \\ &= e\end{aligned}$$

である。また、

$$J_n = -\frac{\pi}{n+1} I_n$$

より、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{n+1}}{J_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{\pi}{n+2} I_{n+1}}{-\frac{\pi}{n+1} I_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{I_{n+1}}{I_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \cdot \frac{I_{n+1}}{I_n} \\ &= e \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_n}{I_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{\pi}{n+1} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

と計算することができる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{n+1}}{J_n} = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_n}{I_n} = 0$$

〔Ⅲ〕

(1)

題意より,

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} \\ &= (1, -1, 2) \\ \overline{AC} &= \overline{OC} - \overline{OA} \\ &= (1, 1, -4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overline{AB}|^2 &= 1^2 + (-1)^2 + 2^2 \\ &= 6 \\ |\overline{AC}|^2 &= 1^2 + 1^2 + (-4)^2 \\ &= 18\end{aligned}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (1, -1, 2) \cdot (1, 1, -4) = -8$$

であるから,  $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{6 \cdot 18 - (-8)^2} \\ &= \sqrt{11}\end{aligned}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) S = \sqrt{11}$$

(2)

$\overline{AB}, \overline{AC}$  の両方に垂直で大きさが1のベクトルを  $\vec{n} = (x, y, z)$  とすると,

$$\begin{aligned}\begin{cases} \overline{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overline{AC} \cdot \vec{n} = 0 \\ |\vec{n}|^2 = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで, 第1式と第2式の和, 差をとることで

$$\begin{aligned}2x - 2z &= 0 \Leftrightarrow x = z \\ -2y + 6z &= 0 \Leftrightarrow y = 3z\end{aligned}$$

であることが分かるので, これらを第3式に代入して

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow z^2 + (3z)^2 + z^2 &= 1 \\ \therefore z &= \pm \frac{1}{\sqrt{11}}\end{aligned}$$

を得る。以上より, 求めるベクトル  $\vec{n}$  は

$$\vec{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{11}}(1, 3, 1)$$

である。

$$(\text{答}) \pm \frac{1}{\sqrt{11}}(1, 3, 1)$$

(3)

直線 PH は3点 A, B, C を通る平面  $\alpha$  に垂直であるから  $\vec{n}$  に平行である。したがって, 実数  $k$  を用いて

$$\begin{aligned}\overline{PH} &= k \cdot \frac{1}{\sqrt{11}}(1, 3, 1) \\ &= \frac{k}{\sqrt{11}}(1, 3, 1)\end{aligned}$$

と表すことができる。このとき,

$$\begin{aligned}\overline{AH} \cdot \vec{n} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overline{PH} - \overline{PA}) \cdot \vec{n} &= 0 \\ \Leftrightarrow k|\vec{n}|^2 - \overline{PA} \cdot \vec{n} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{k}{11}(1^2 + 3^2 + 1^2) - \frac{1}{\sqrt{11}}(1 - 2\cos\theta, 2 - \sin\theta, 3) \cdot (1, 3, 1) &= 0 \\ \therefore k &= \frac{10 - 3\sin\theta - 2\cos\theta}{\sqrt{11}}\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}\overline{OH} &= \overline{OP} + \overline{PH} \\ &= (2\cos\theta, \sin\theta, 0) + \frac{k}{\sqrt{11}}(1, 3, 1) \\ &= (2\cos\theta, \sin\theta, 0) + \frac{10 - 3\sin\theta - 2\cos\theta}{11}(1, 3, 1) \\ &= \left( \frac{10 - 3\sin\theta + 20\cos\theta}{11}, \frac{30 + 2\sin\theta - 6\cos\theta}{11}, \frac{10 - 3\sin\theta - 2\cos\theta}{11} \right)\end{aligned}$$

となる。したがって, 点 H の座標は,

$$H\left(\frac{10 - 3\sin\theta + 20\cos\theta}{11}, \frac{30 + 2\sin\theta - 6\cos\theta}{11}, \frac{10 - 3\sin\theta - 2\cos\theta}{11}\right)$$

である。

$$(\text{答}) H\left(\frac{10 - 3\sin\theta + 20\cos\theta}{11}, \frac{30 + 2\sin\theta - 6\cos\theta}{11}, \frac{10 - 3\sin\theta - 2\cos\theta}{11}\right)$$

(4)

四面体 PABC の体積  $V$  は,

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot |\overline{PH}|$$

で与えられる。ここで, (3)より

$$\begin{aligned}|\overline{PH}| &= |k| \cdot |\vec{n}| \\ &= |k| \\ &= \frac{10 - 3\sin\theta - 2\cos\theta}{\sqrt{11}} \quad (\because 3\sin\theta + 2\cos\theta < 10)\end{aligned}$$

であるから,  $S = \sqrt{11}$  より

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{11} \cdot \frac{10 - 3\sin\theta - 2\cos\theta}{\sqrt{11}} \\ &= \frac{10 - 3\sin\theta - 2\cos\theta}{3}\end{aligned}$$

と表すことができる。

$$(\text{答}) V = \frac{10 - 3\sin\theta - 2\cos\theta}{3}$$

(5)

$$\begin{aligned}3\sin\theta + 2\cos\theta &= \sqrt{3^2 + 2^2} \sin(\theta + \alpha) \quad \left( \text{ただし } \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \right) \\ &= \sqrt{13} \sin(\theta + \alpha)\end{aligned}$$

であるから, (4)より

$$\begin{aligned}V &= \frac{10 - 3\sin\theta - 2\cos\theta}{3} \\ &= \frac{10 - \sqrt{13} \sin(\theta + \alpha)}{3}\end{aligned}$$

である。  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき

$$-1 \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1$$

であることから

$$\frac{10 - \sqrt{13}}{3} \leq V \leq \frac{10 + \sqrt{13}}{3}$$

である。したがって,  $V$  の最大値は  $\frac{10 + \sqrt{13}}{3}$ , 最小値は  $\frac{10 - \sqrt{13}}{3}$  である。

$$(\text{答}) \text{ 最大値: } \frac{10 + \sqrt{13}}{3}, \text{ 最小値: } \frac{10 - \sqrt{13}}{3}$$

〔Ⅳ〕

(1)

与えられた関数

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2} + \frac{6}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x}{2} + 6x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

について、

$$f'(x) = \frac{1}{2} - 3x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{9}{2}x^{-\frac{5}{2}} (>0)$$

あるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^{-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{2} \\ \therefore x &= 6^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

である。 $6^2 < 4^3 \Leftrightarrow 6^{\frac{2}{3}} < 4$ より  $x = 6^{\frac{2}{3}}$  は閉区間  $4 \leq x \leq 9$  に含まれないため、閉区間  $4 \leq x \leq 9$  において  $f'(x) > 0$  および  $f''(x) > 0$  が成り立つ。したがって、 $f(x)$  と  $f'(x)$  は単調増加することから

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(4) \leq f(x) \leq f(9) \\ f'(4) \leq f'(x) \leq f'(9) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 5 \leq f(x) \leq \frac{13}{2} \\ \frac{1}{8} \leq f'(x) \leq \frac{7}{18} \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立ち、 $f(x)$  の最大値は  $\frac{13}{2}$ 、最小値は 4 である。また、 $f'(x)$  の最大値は  $\frac{7}{18}$ 、最小値は  $\frac{1}{8}$  である。

(答)  $f(x)$  の最大値:  $\frac{13}{2}$ 、 $f(x)$  の最小値: 5

$f'(x)$  の最大値:  $\frac{7}{18}$ 、 $f'(x)$  の最小値:  $\frac{1}{8}$

(2)

以下、すべての自然数  $n$  について  $4 < a_n < 9$  が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

[1]  $n=1$  のとき

このとき、確かに

$$4 < a_1 < 9$$

を満たす。

[2]  $n=k$  ( $k$  は自然数) で成り立つと仮定したとき

このとき、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k}{2} + \frac{6}{\sqrt{a_k}} \\ &= f(a_k) \end{aligned}$$

について、 $4 \leq a_k \leq 9$  が成り立つことから、(1) の結果より

$$\begin{aligned} 5 &\leq f(a_k) \leq \frac{13}{2} \\ \Leftrightarrow 5 &\leq a_{k+1} \leq \frac{13}{2} \\ \therefore 4 &< a_{k+1} < 9 \end{aligned}$$

となる。よって、 $n=k+1$  のときも成り立つ。

以上 [1], [2] より、すべて自然数  $n$  について  $4 < a_n < 9$  が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

$c = f(c)$  を満たす正の実数  $c$  は、

$$\begin{aligned} c &= f(c) \\ \Leftrightarrow c &= \frac{c}{2} + \frac{6}{\sqrt{c}} \\ \Leftrightarrow \frac{c}{2} &= \frac{6}{\sqrt{c}} \\ \Leftrightarrow c^{\frac{3}{2}} &= 12 \\ \therefore c &= 12^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

と求めることができる。

(答)  $c = 12^{\frac{2}{3}}$

(4)

$f(x)$  は閉区間  $4 \leq x \leq 9$  で単調増加関数であることから、ある自然数  $n$  について  $a_n < c$  が成り立つとき、

$$\begin{aligned} a_n &< c \\ \Leftrightarrow f(a_n) &< f(c) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &< c \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} c - a_1 &= 12^{\frac{2}{3}} - 5 \\ &= 144^{\frac{1}{3}} - 125^{\frac{1}{3}} \\ &> 0 \\ \therefore a_1 &< c \end{aligned}$$

より帰納的に任意の自然数  $n$  について  $a_n < c$  が成り立つ。このとき、平均値の定理より

$$\begin{aligned} \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} &= f'(t) \\ \Leftrightarrow \frac{c - a_{n+1}}{c - a_n} &= f'(t) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を満たす実数  $t$  が  $a_n$  と  $c$  との間に存在する。(2) より

$$4 < a_n < 9$$

であり、 $c = 12^{\frac{2}{3}}$  は

$$\begin{aligned} 8^{\frac{2}{3}} &< c < 27^{\frac{2}{3}} \\ \Leftrightarrow 4 &< c_n < 9 \end{aligned}$$

を満たすことから、実数  $t$  についても

$$4 < t < 9$$

が成り立つ。このとき、(1) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} &< f'(t) < \frac{7}{18} \\ \therefore 0 &< f'(t) < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので、 $\textcircled{1}$  より  $n=1, 2, 3, \dots$  に対して

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{c - a_{n+1}}{c - a_n} < \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 0 &< c - a_{n+1} < \frac{c - a_n}{2} \quad (\because c - a_n > 0) \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(5)

(4) の結果より  $n \geq 2$  に対して

$$0 < c - a_n < \frac{c - a_{n-1}}{2}$$

であるから、これを繰り返し用いて、

$$0 < c - a_n < \frac{c - a_1}{2^{n-1}}$$

を得る。ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c - a_1}{2^{n-1}} = 0$$

となることから、はさみうちの原理より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (c - a_n) &= 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= c = 12^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

であることが分かる。

(答)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 12^{\frac{2}{3}}$