

【Ⅰ】

【解答】

	ア	イ	ウ
(1)	$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\log\frac{2}{3}$

	エ	オ	カ	キ
(2)	1	$\sqrt{17}$	$\frac{8\sqrt{17}}{17}$	$\frac{\sqrt{17}}{17}$

	ク	ケ	コ
(3)	$\frac{\pi}{2}$	0	620π

【解説】

(1)

X_n が 3 で割り切れるという事象の余事象、すなわち X_n が 3 で割り切れないという事象の確率を考える。第 n 回までに出た n 個の目の積が 3 の倍数でないとき、すべての試行で 3 と 6 以外の目が出ることになるので、この確率は、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^n$$

で与えられる。従って、 X_n が 3 で割り切れる確率は、

$$1-\left(\frac{4}{6}\right)^n=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

である。同様に、第 n 回までに出た n 個の目の積が 2 の倍数でないとき、すべての試行で 2 と 4 と 6 以外の目が出ることになるので、 X_n が 2 で割り切れる確率は、

$$1-\left(\frac{3}{6}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である。次に、 X_n が 6 で割り切れる確率 p_n を考えるために、余事象である X_n が 6 で割り切れない確率 $1-p_n$ を考える。今、事象 A, B, C を、

A: X_n が 2 で割り切れない

B: X_n が 3 で割り切れない

C: X_n が 2 で割り切れず、かつ 3 で割り切れない (A かつ B)

と定めると、 X_n が 6 で割り切れない事象は A または B に相当する。ここで、事象 X の確率を $P(X)$ と表すと、

$$P(A)=\left(\frac{3}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(B)=\left(\frac{4}{6}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$P(C)=\left(\frac{2}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

であるから、A または B である確率、すなわち $1-p_n$ は、

$$\begin{aligned} 1-p_n &= P(A)+P(B)-P(C) \\ &=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n) &= \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\log\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \\ &= \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\log\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right] \\ &= \lim_{n\rightarrow\infty}\log\left[\frac{2}{3}\left\{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}\right] \\ &= \log\left\{\frac{2}{3}(1+0-0)^0\right\}\left\{\because\lim_{n\rightarrow\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\lim_{n\rightarrow\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0,\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}=0\right\} \\ &= \log\frac{2}{3} \end{aligned}$$

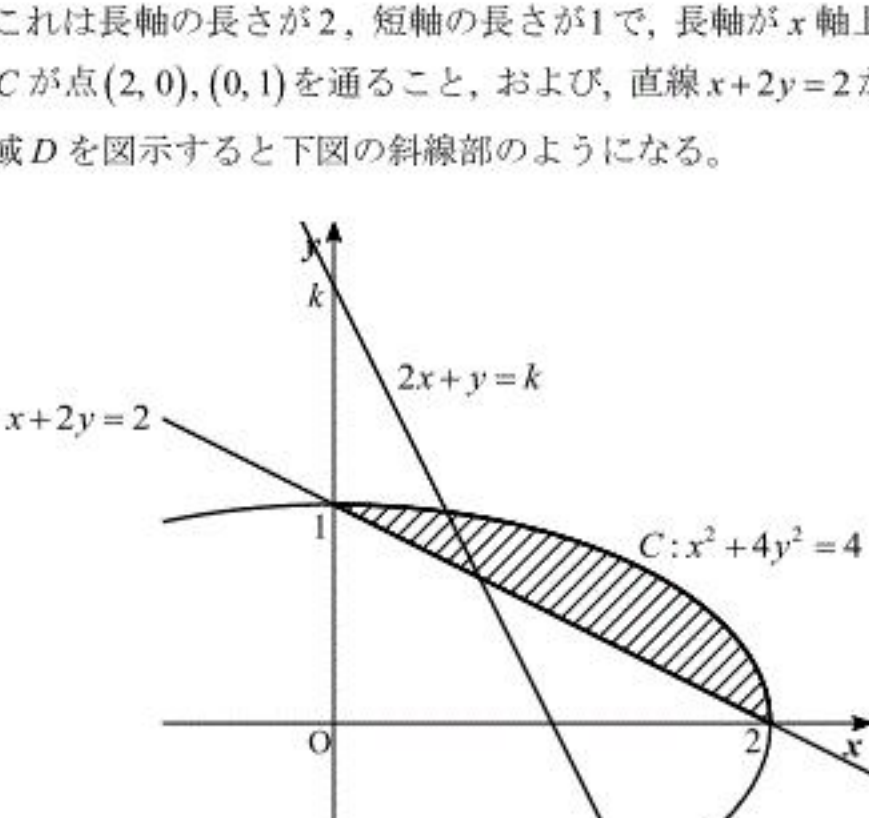
である。

(2)

曲線 C を、

$$C:x^2+4y^2=4\Leftrightarrow\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

と定めると、これは長軸の長さが 2、短軸の長さが 1 で、長軸が x 軸上に存在する楕円を表す。ここで、曲線 C が点 $(2, 0)$ 、 $(0, 1)$ を通ること、および、直線 $x+2y=2$ が点 $(2, 0)$ 、 $(0, 1)$ を通ることから、領域 D を図示すると下図の斜線部ようになる。



ここで $2x+y=k$ とおき、この方程式の表す直線が D を通る場合について考える。 k は直線 $2x+y=k$ の y 切片であるから、上図より、 k は直線 $2x+y=k$ が点 $(0, 1)$ を通るときに最小値 1 をとる。一方、 k が最大となるのは直線 $y=-2x+k$ と楕円が第 1 象限で接する場合である。

このとき、楕円の方程式に直線の方程式を代入して得られる 2 次方程式

$$\begin{aligned} x^2+4(-2x+k)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 17x^2-16kx+4k^2-4 &= 0 \end{aligned}$$

は重解をもつ。したがって、判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4}=64k^2-17\cdot(4k^2-4)=-4k^2+4\cdot17$$

より

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow -4k^2+4\cdot17 &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \pm\sqrt{17} \end{aligned}$$

となり、上図より $k>0$ であるから $k=\sqrt{17}$ となる。このときの 2 次方程式の重解は

$$\begin{aligned} 17x^2-16\sqrt{17}x+4\cdot17-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{17}x-8)^2 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{8}{\sqrt{17}} \end{aligned}$$

であり、

$$y=-2\cdot\frac{8}{\sqrt{17}}+\sqrt{17}=\frac{1}{\sqrt{17}}$$

であるから、 k は点 $\left(\frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)=\left(\frac{8\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}\right)$ において最大値 $\sqrt{17}$ をとる。

(3)

異なる正整数 m, n に対して、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^2 nx dx &= \int_0^\pi \frac{1-\cos 2nx}{2} dx \\ &= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2nx}{4n} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin mx \sin nx dx &= \int_0^\pi \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2} dx \\ &= \left[\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} \right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $f(x)=\sum_{n=1}^{15} n \sin nx$ について、

$$\{f(x)\}^2 = \sum_{n=1}^{15} n^2 \sin^2 nx + \sum_{n \neq m} mn \sin mx \sin nx$$

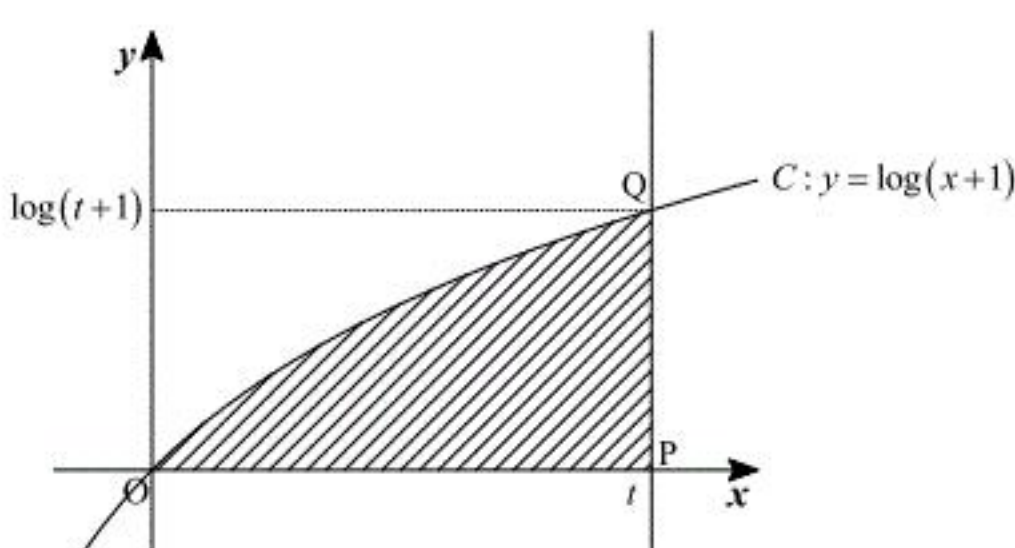
と表せる。ただし、 $\sum_{n \neq m} mn \sin mx \sin nx$ は、1 から 15 までの異なる自然数 m, n のすべての組み合わせについての和を表す。以上より、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \{f(x)\}^2 dx &= \int_0^\pi \sum_{n=1}^{15} n^2 \sin^2 nx dx + \int_0^\pi \sum_{n \neq m} mn \sin mx \sin nx dx \\ &= \sum_{n=1}^{15} n^2 \int_0^\pi \sin^2 nx dx + \sum_{n \neq m} mn \int_0^\pi \sin mx \sin nx dx \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{15} n^2 + \sum_{n \neq m} mn \cdot 0 \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{15(15+1)(2\cdot15+1)}{6} \\ &= 620\pi \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)



上図斜線部の面積 $S(t)$ を求めると、

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t \log(x+1) dx \\ &= \left[(x+1) \log(x+1) - x \right]_0^t \\ &= (t+1) \log(t+1) - t \end{aligned}$$

となる。

(答) $S(t) = (t+1) \log(t+1) - t$

(2)

$\triangle OPQ$ の面積 $T(t)$ を求めると、

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{2} \cdot OP \cdot PQ \\ &= \frac{1}{2} t \log(t+1) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T(t)}{S(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} t \log(t+1)}{(t+1) \log(t+1) - t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{t+1}{t} - \frac{1}{\log(t+1)}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(3)

曲線 C の方程式は $y = \log(x+1)$ であり、導関数は

$$y' = \frac{1}{x+1}$$

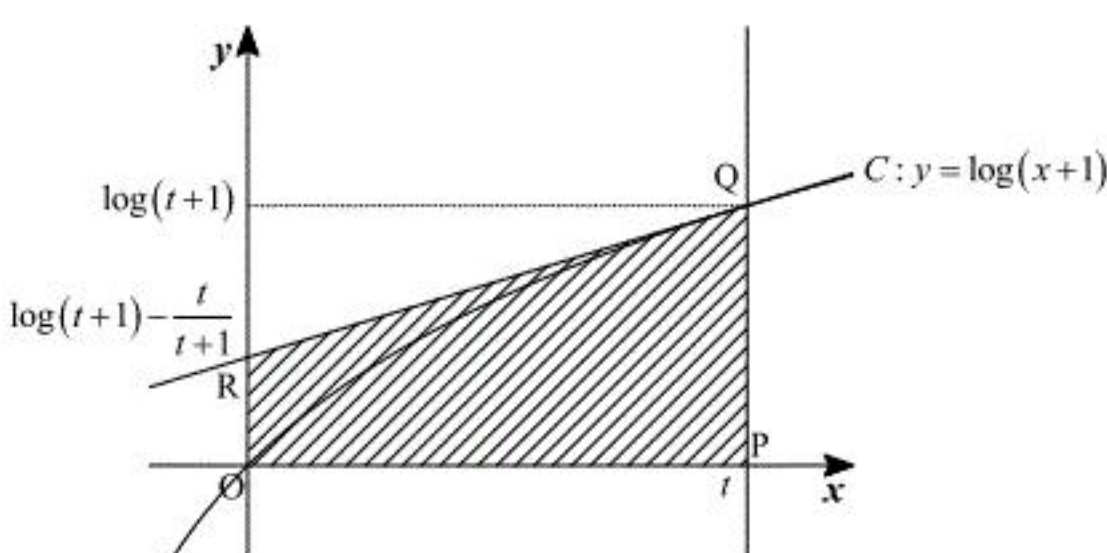
である。したがって、点 $Q(t, \log(t+1))$ における曲線 C の接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{t+1} (x-t) + \log(t+1) \\ &= \frac{1}{t+1} x + \log(t+1) - \frac{t}{t+1} \end{aligned}$$

となるので、求める点 R の座標は $\left(0, \log(t+1) - \frac{t}{t+1}\right)$ である。

(答) $\left(0, \log(t+1) - \frac{t}{t+1}\right)$

(4)



上図斜線部の面積 $U(t)$ を求めると、

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{OR + PQ}{2} \cdot OP \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(2 \log(t+1) - \frac{t}{t+1} \right) \cdot t \\ &= \frac{2t(t+1) \log(t+1) - t^2}{2(t+1)} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{S(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t(t+1) \log(t+1) - t^2}{2(t+1)} \cdot \frac{1}{(t+1) \log(t+1) - t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t \{ (t+1) \log(t+1) - t \} + t^2}{2(t+1) \{ (t+1) \log(t+1) - t \}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{t}{t+1} + \frac{t^2}{2(t+1) \{ (t+1) \log(t+1) - t \}} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1}{t}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t}\right) \log(t+1) - 1} \right\} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) 1

【Ⅲ】

(1)

$$\overrightarrow{\text{PA}} = \begin{pmatrix} -p-1 \\ -q+5 \\ -r \end{pmatrix}, \overrightarrow{\text{PB}} = \begin{pmatrix} -p+2 \\ -q+2 \\ -r \end{pmatrix}, \overrightarrow{\text{PC}} = \begin{pmatrix} -p-2 \\ -q \\ -r \end{pmatrix}$$

であるから、 $\overrightarrow{\text{PA}} \perp \overrightarrow{\text{PB}}, \overrightarrow{\text{PB}} \perp \overrightarrow{\text{PC}}, \overrightarrow{\text{PC}} \perp \overrightarrow{\text{PA}}$ より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{PA}} &\perp \overrightarrow{\text{PB}} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{PA}} \cdot \overrightarrow{\text{PB}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-p-1)(-p+2) + (-q+5)(-q+2) + (-r)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 - p + q^2 - 7q + r^2 + 8 &= 0 & \dots \textcircled{1} \\ \overrightarrow{\text{PB}} &\perp \overrightarrow{\text{PC}} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{PB}} \cdot \overrightarrow{\text{PC}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-p+2)(-p-2) + (-q+2)(-q) + (-r)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 + q^2 - 2q + r^2 - 4 &= 0 & \dots \textcircled{2} \\ \overrightarrow{\text{PC}} &\perp \overrightarrow{\text{PA}} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{PC}} \cdot \overrightarrow{\text{PA}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-p-2)(-p-1) + (-q)(-q+5) + (-r)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 + 3p + q^2 - 5q + r^2 + 2 &= 0 & \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

と計算できる。①、②より、

$$-p - 5q + 12 = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

となり、②、③より、

$$\begin{aligned} -3p + 3q - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow -p + q - 2 &= 0 & \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

となる。したがって、④と⑤を連立して解くと、

$$(p, q) = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

と求まる。これを②に代入すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{7}{3} \right)^2 - 2 \cdot \frac{7}{3} + r^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow r^2 &= -\frac{1}{9} - \frac{49}{9} + \frac{14}{3} + 4 = \frac{28}{9} \\ \therefore r &= \frac{2\sqrt{7}}{3} \quad (\because r > 0) \end{aligned}$$

と求まる。以上より、

$$(p, q, r) = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2\sqrt{7}}{3} \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad (p, q, r) = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2\sqrt{7}}{3} \right)$$

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{PA}}|^2 &= \left(-\frac{4}{3} \right)^2 + \left(\frac{8}{3} \right)^2 + \left(-\frac{2\sqrt{7}}{3} \right)^2 \\ &= \frac{16}{9} + \frac{64}{9} + \frac{28}{9} \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{\text{PA}}| = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{PB}}|^2 &= \left(\frac{5}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(-\frac{2\sqrt{7}}{3} \right)^2 \\ &= \frac{25}{9} + \frac{1}{9} + \frac{28}{9} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{\text{PB}}| = \sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{PC}}|^2 &= \left(-\frac{7}{3} \right)^2 + \left(-\frac{7}{3} \right)^2 + \left(-\frac{2\sqrt{7}}{3} \right)^2 \\ &= \frac{49}{9} + \frac{49}{9} + \frac{28}{9} \\ &= 14 \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{\text{PC}}| = \sqrt{14}$$

と計算できる。 $\overrightarrow{\text{PA}} \perp \overrightarrow{\text{PB}}, \overrightarrow{\text{PB}} \perp \overrightarrow{\text{PC}}, \overrightarrow{\text{PC}} \perp \overrightarrow{\text{PA}}$ より、求める体積を V とすると、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} |\overrightarrow{\text{PA}}| \cdot |\overrightarrow{\text{PB}}| \right) \cdot |\overrightarrow{\text{PC}}| \\ &= \frac{1}{6} |\overrightarrow{\text{PA}}| |\overrightarrow{\text{PB}}| |\overrightarrow{\text{PC}}| \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{14} \\ &= 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad 2\sqrt{7}$$

(3)

条件より、

$$\overrightarrow{\text{PH}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2\sqrt{7}}{3} \end{pmatrix}$$

である。また、

$$\overrightarrow{\text{AB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\text{BC}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\text{CA}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。 $\overrightarrow{\text{PA}} \cdot \overrightarrow{\text{PB}} = \overrightarrow{\text{PB}} \cdot \overrightarrow{\text{PC}} = \overrightarrow{\text{PC}} \cdot \overrightarrow{\text{PA}} = 0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{CH}} &= (\overrightarrow{\text{PB}} - \overrightarrow{\text{PA}}) \cdot (\overrightarrow{\text{PH}} - \overrightarrow{\text{PC}}) \\ &= \overrightarrow{\text{PB}} \cdot \overrightarrow{\text{PH}} - \overrightarrow{\text{PA}} \cdot \overrightarrow{\text{PH}} \\ &= \overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{PH}} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2\sqrt{7}}{3} \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

と求まる。同様にして、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{BC}} \cdot \overrightarrow{\text{AH}} &= \overrightarrow{\text{BC}} \cdot \overrightarrow{\text{PH}} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2\sqrt{7}}{3} \end{pmatrix} \\ &= 0 \\ \overrightarrow{\text{CA}} \cdot \overrightarrow{\text{BH}} &= \overrightarrow{\text{CA}} \cdot \overrightarrow{\text{PH}} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2\sqrt{7}}{3} \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{CH}} = \overrightarrow{\text{BC}} \cdot \overrightarrow{\text{AH}} = \overrightarrow{\text{CA}} \cdot \overrightarrow{\text{BH}} = 0$$

〔Ⅳ〕

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^{-x} \cos x \text{ より,} \\ f'(x) &= -2^{-x} \cdot \log 2 \cdot \cos x + 2^{-x} \cdot (-\sin x) \\ &= -2^{-x} \{(\log 2) \cos x + \sin x\} \end{aligned}$$

と計算できる。したがって、 n は正整数であるから、

$$\begin{aligned} f'(n\pi) &= -2^{-n\pi} \{(\log 2) \cos n\pi + \sin n\pi\} \\ &= -2^{-n\pi} \cdot \log 2 \cdot (-1)^n \\ &= (\log 2)(-1)^{n+1} 2^{-n\pi} \\ f(n\pi) &= 2^{-n\pi} \cos n\pi \\ &= (-1)^n 2^{-n\pi} \end{aligned}$$

と計算できる。したがって、点 P における C の接線の方程式は、

$$y = \{(\log 2)(-1)^{n+1} 2^{-n\pi}\}(x - n\pi) + (-1)^n 2^{-n\pi}$$

と表せる。上式に $y = 0$ を代入して、

$$\begin{aligned} 0 &= \{(\log 2)(-1)^{n+1} 2^{-n\pi}\}(x - n\pi) + (-1)^n 2^{-n\pi} \\ \Leftrightarrow \{(\log 2)(-1)^{n+1} 2^{-n\pi}\}(x - n\pi) &= (-1)^{n+1} 2^{-n\pi} \\ \Leftrightarrow x - n\pi &= \frac{1}{\log 2} \\ \therefore x &= n\pi + \frac{1}{\log 2} \end{aligned}$$

と求まるので、

$$A\left(n\pi + \frac{1}{\log 2}, 0\right)$$

である。

$$(\text{答}) \ A\left(n\pi + \frac{1}{\log 2}, 0\right)$$

(2)

(1)より、点 P における法線の傾きは、 $f'(n\pi) \neq 0$ に注意すると、

$$\frac{1}{-f'(n\pi)} = \frac{1}{\log 2} \cdot (-1)^n \cdot 2^{n\pi}$$

である。したがって、点 P における C の法線の方程式は、

$$y = \left\{ \frac{1}{\log 2} (-1)^n 2^{n\pi} \right\} (x - n\pi) + (-1)^n 2^{-n\pi}$$

と表せる。上式に $y = 0$ を代入して、

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ \frac{1}{\log 2} (-1)^n 2^{n\pi} \right\} (x - n\pi) + (-1)^n 2^{-n\pi} \\ \Leftrightarrow \left\{ \frac{1}{\log 2} (-1)^n 2^{n\pi} \right\} (x - n\pi) &= (-1)^{n+1} 2^{-n\pi} \\ \Leftrightarrow x - n\pi &= -(\log 2) 2^{-2n\pi} \\ \therefore x &= n\pi - (\log 2) 2^{-2n\pi} \end{aligned}$$

と求まるので、

$$B(n\pi - (\log 2) 2^{-2n\pi}, 0)$$

である。

$$(\text{答}) \ B(n\pi - (\log 2) 2^{-2n\pi}, 0)$$

(3)

点 P から x 軸におろした垂線の足を H とすると、

$$\begin{aligned} PH &= \left| (-1)^n 2^{-n\pi} \right| \\ &= 2^{-n\pi} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} AB &= n\pi + \frac{1}{\log 2} - \{n\pi - (\log 2) 2^{-2n\pi}\} \\ &= \frac{1}{\log 2} + (\log 2) 2^{-2n\pi} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PH \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^{-n\pi} \cdot \left\{ \frac{1}{\log 2} + (\log 2) 2^{-2n\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\log 2} 2^{-n\pi} + (\log 2) 2^{-3n\pi} \right\} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \ T_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\log 2} 2^{-n\pi} + (\log 2) 2^{-3n\pi} \right\}$$

(4)

(3)より、 $U_n = \frac{1}{\log 2} 2^{-n\pi}$ 、 $V_n = (\log 2) 2^{-3n\pi}$ とおくと $T_n = \frac{1}{2}(U_n + V_n)$ であり、 $\{U_n\}$ は初項 $\frac{2^{-\pi}}{\log 2}$ 、公比 $2^{-\pi}$ の等比数列、 $\{V_n\}$ は初項 $(\log 2) 2^{-3\pi}$ 、公比 $2^{-3\pi}$ の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} U_n &= \frac{2^{-\pi}}{\log 2} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-\pi}} = \frac{1}{(\log 2)(2^{\pi} - 1)} \\ \sum_{n=1}^{\infty} V_n &= \frac{(\log 2) 2^{-3\pi}}{1 - 2^{-3\pi}} = \frac{\log 2}{2^{3\pi} - 1} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} T_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(U_n + V_n) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(\log 2)(2^{\pi} - 1)} + \frac{\log 2}{2^{3\pi} - 1} \right\} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(\log 2)(2^{\pi} - 1)} + \frac{\log 2}{2^{3\pi} - 1} \right\}$$