

【Ⅰ】

〔解答〕

- (1) ア $\frac{1}{12}$ イ $\frac{1}{144}$
- (2) ウ 144 エ 24
- (3) オ -1 カ $\frac{17}{4}$
- (4) キ -2 ク 3 ケ 36 コ -1

〔解説〕

- (1)
- $x^2-2\sqrt{3}x+7=0$ を解くと
- $$x=\sqrt{3}\pm 2i$$
- となる。したがって
- $$\alpha=\sqrt{3}+2i, \beta=\sqrt{3}-2i$$

となる。このとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\alpha+i)^2}&=\frac{1}{(\sqrt{3}+3i)^2} \\&=\frac{1}{-6+6\sqrt{3}i} \\&=-\frac{1}{6(1-\sqrt{3}i)} \\&=-\frac{(1+\sqrt{3}i)}{6(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} \\&=-\frac{1+\sqrt{3}i}{24}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\beta-i)^2}&=\frac{1}{(\sqrt{3}-3i)^2} \\&=\frac{1}{-6-6\sqrt{3}i} \\&=-\frac{1}{6(1+\sqrt{3}i)} \\&=-\frac{(1-\sqrt{3}i)}{6(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} \\&=-\frac{1-\sqrt{3}i}{24}\end{aligned}$$

であるから、 $x^2+Ax+B=0$ について解と係数の関係より

$$\begin{aligned}&\begin{cases}\left(-\frac{1-\sqrt{3}i}{24}\right)+\left(-\frac{1+\sqrt{3}i}{24}\right)=-A \\ \left(-\frac{1-\sqrt{3}i}{24}\right)\left(-\frac{1+\sqrt{3}i}{24}\right)=B\end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{1}{12}=-A \\ \frac{1}{144}=B\end{cases} \\&\Leftrightarrow A=\frac{1}{12}, B=\frac{1}{144}\end{aligned}$$

である。

- (2)
- $a=\log_7 2, b=\log_3 2$ より
- $$7^a=2, 7^b=3$$
- となる。したがって
- $$\begin{aligned}49^{3a+b}&=7^{4a+2b} \\&=(7^a)^4\cdot(7^b)^2 \\&=2^4\cdot 3^2 \\&=144\end{aligned}$$
- となる。

$$\log_9 x+\log_9 (x-18)=1+\frac{2a}{b} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

について、真数条件より

$$\begin{aligned}x &> 0, x-18 > 0 \\ \therefore x &> 18\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}1+\frac{2a}{b}&=1+\frac{2\log_7 2}{\log_7 3} \\&=1+2\log_3 2 \\&=\log_9 9+\frac{2\log_9 2}{\log_9 3} \\&=\log_9 9+4\log_9 2 \\&=\log_9 144\end{aligned}$$

となるので、これを①に代入すると

$$\begin{aligned}\log_9 x+\log_9 (x-18)&=\log_9 144 \\ \Leftrightarrow x(x-18)&=144 \\ \Leftrightarrow x^2-18x-144&=0 \\ \Leftrightarrow (x+6)(x-24)&=0 \\ \therefore x &=24 \quad (\because x>18)\end{aligned}$$

となる。

- (3)
- $$\int_{-1}^1 f(t)dt=2x^2-ax+a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$
- に $x=-1$ を代入することにより
- $$\begin{aligned}0 &=2+2a \\ \Leftrightarrow a &=-1\end{aligned}$$

と求まる。このとき、①の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}f(x) &=4x-a \\ &=4x+1\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |f(x)|dx &= \int_{-1}^1 |4x+1|dx \\&= \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} (-4x-1)dx + \int_{-\frac{1}{4}}^1 (4x+1)dx \\&= \left[-2x^2-x\right]_{-1}^{-\frac{1}{4}} + \left[2x^2+x\right]_{-\frac{1}{4}}^1 \\&= \frac{17}{4}\end{aligned}$$

となる。

- (4)
- 3次関数 $f(x)$ が $x=-2$ で極小値をとり、 $x=3$ で極大値をとることから、 $f'(x)$ は正の実数 a を用いて

$$\begin{aligned}f'(x) &=-a(x+2)(x-3) \\&=-a(x^2-x-6)\end{aligned}$$

とおける。これを積分すると、 C を積分定数として $f(x)$ は

$$f(x)=-a\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x\right)+C$$

と表せる。このとき

$$\begin{aligned}f(1) &=-a\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}-6\cdot 1\right)+C \\&=\frac{37}{6}a+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(1) &=-a(1^2-1-6) \\&=6a\end{aligned}$$

であるから、 $P(1, f(1))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned}y &=6a(x-1)+\frac{37}{6}a+C \\&=6ax+\frac{a}{6}+C\end{aligned}$$

となる。これが原点を通るので、 $(x, y)=(0, 0)$ を代入して

$$0=\frac{a}{6}+C$$

$$\Leftrightarrow C=-\frac{a}{6}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}f(x) &=-a\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x\right)-\frac{a}{6} \\&=-a\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+\frac{1}{6}\right)\end{aligned}$$

となる。ここで、曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=-45$ の共有点が2個であることから、 $y=f(x)$ の極小値または極大値のいずれかが -45 である。

$$\begin{aligned}f(-2) &=-a\left\{\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}-6\cdot(-2)+\frac{1}{6}\right\} \\&=-\frac{15}{2}a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(3) &=-a\left\{\frac{3^3}{3}-\frac{3^2}{2}-6\cdot 3+\frac{1}{6}\right\} \\&=\frac{40}{3}a\end{aligned}$$

であるので、 $a>0$ より

$$\begin{aligned}f(-2) &=-45 \\ \Leftrightarrow -\frac{15}{2}a &=-45 \\ \therefore a &=6\end{aligned}$$

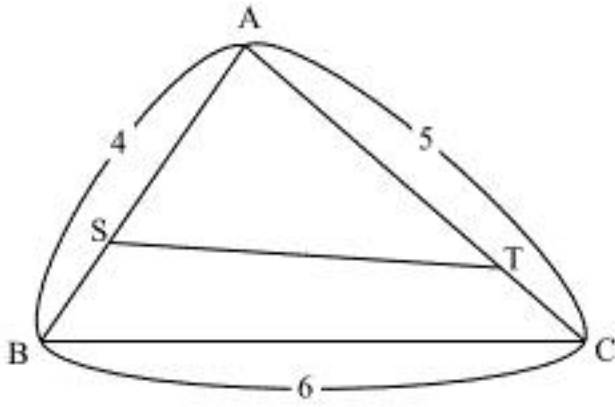
となる。よって

$$\begin{aligned}f(x) &=-6\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+\frac{1}{6}\right) \\&=-2x^3+3x^2+36x-1\end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)



△ABCにおいて余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \\ &= \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= \frac{5}{40} \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\cos\theta = \frac{1}{8}$

(2)

△AST, △ABCの面積をそれぞれ S_1, S_2 とおくと、

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot AS \cdot AT \cdot \sin\theta$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\theta$$

となる。条件より、 $2S_1 = S_2$ であるから、

$$\begin{aligned}2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AS \cdot AT \cdot \sin\theta &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\theta \\ \Leftrightarrow 2AS \cdot AT &= AB \cdot AC \\ \therefore AT &= \frac{AB \cdot AC}{2AS} \\ &= \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot x} \\ &= \frac{10}{x}\end{aligned}$$

と求まる。したがって、△ASTにおいて余弦定理より、

$$\begin{aligned}ST^2 &= AS^2 + AT^2 - 2 \cdot AS \cdot AT \cdot \cos\theta \\ &= x^2 + \frac{100}{x^2} - 2 \cdot x \cdot \frac{10}{x} \cdot \frac{1}{8} \\ &= x^2 + \frac{100}{x^2} - \frac{5}{2}\end{aligned}$$

となるので、 $ST \geq 0$ より、

$$ST = \sqrt{x^2 + \frac{100}{x^2} - \frac{5}{2}}$$

と求まる。

(答) $ST = \sqrt{x^2 + \frac{100}{x^2} - \frac{5}{2}}$

(3)

点Sは線分AB上の点であるから、

$$0 \leq x \leq 4$$

であり、点Tは線分AC上の点であるから

$$0 \leq \frac{10}{x} \leq 5$$

$$\therefore x \geq 2$$

である。したがって、

$$2 \leq x \leq 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。正の実数 k を用いて $x^2 + \frac{100}{x^2} - \frac{5}{2} = k$ と表すと、 $x^2 > 0$ より両辺に x^2 をかけて

$$x^4 - \left(k + \frac{5}{2}\right)x^2 + 100 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

と変形できる。 $x^2 = t$ とおくと、①より、 $4 \leq t \leq 16$ であり、上式は

$$t^2 - \left(k + \frac{5}{2}\right)t + 100 = 0$$

と書き換えられる。 $4 \leq t \leq 16$ に上式が実数解をもつような k の範囲を考える。

$f(t) = t^2 - \left(k + \frac{5}{2}\right)t + 100$ とおき $f(t) = 0$ の判別式を D とすると、②が $4 \leq t \leq 16$ に実数解をもつ条件は

$$\begin{cases} 4 \leq \frac{k}{2} + \frac{5}{4} \leq 16 \\ D \geq 0 \\ f(4) \geq 0 \\ f(16) \geq 0 \end{cases}$$

または

$$f(4) \cdot f(16) \leq 0$$

である。ここで、

$$f(4) = -4k + 106$$

$$f(16) = -16k + 316$$

$$D = \left(k + \frac{5}{2}\right)^2 - 4 \cdot 100$$

$$= \left(k + \frac{45}{2}\right) \left(k - \frac{35}{2}\right)$$

であるから、条件は

$$\begin{cases} \frac{11}{2} \leq k \leq \frac{59}{2} \\ k \leq \frac{-45}{2}, \frac{35}{2} \leq k \\ k \leq \frac{79}{4} \\ k \leq \frac{53}{2} \end{cases}$$

または

$$\frac{79}{4} \leq k \leq \frac{53}{2}$$

である。すなわち、②が $4 \leq t \leq 16$ に実数解をもつような k の範囲は

$$\frac{35}{2} \leq k \leq \frac{53}{2}$$

である。したがって、 $k = \frac{35}{2}$ のときSTは最小となり、このとき $k = \frac{35}{2}$ を $t^2 - \left(k + \frac{5}{2}\right)t + 100 = 0$ に代入して

$$\begin{aligned}t^2 - 20t + 100 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 10)^2 &= 0 \\ \therefore t &= 10 \\ \therefore x &= \sqrt{10} \quad (\because 2 \leq x \leq 4)\end{aligned}$$

と求まる。以上より、 $x = \sqrt{10}$ のときSTは最小値 $\sqrt{\frac{35}{2}} = \frac{\sqrt{70}}{2}$ をとる。

(答) 最小値: $\frac{\sqrt{70}}{2}$, $x = \sqrt{10}$

(4)

(3)より、STは $k = \frac{53}{2}$ のとき最大となり、このとき $k = \frac{53}{2}$ を $t^2 - \left(k + \frac{5}{2}\right)t + 100 = 0$ に代入して

$$\begin{aligned}t^2 - 19t + 100 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 4)(t - 25) &= 0 \\ \therefore t &= 4 \quad (\because 4 \leq t \leq 16) \\ \therefore x &= 2 \quad (\because 2 \leq x \leq 4)\end{aligned}$$

と求まる。以上より、 $x = 2$ のときSTは最大値 $\sqrt{\frac{53}{2}} = \frac{\sqrt{106}}{2}$ をとる。

(答) 最大値: $\frac{\sqrt{106}}{2}$, $x = 2$

〔Ⅲ〕

(1)

点Aが点Bを通るとき、7回目までの試行においてコインの表は3回、裏は4回出るため、その確率は

$${}_7C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{128}$$

となる。また終点が点Eとなると、8回目から13回目までの試行においてコインの表は4回、裏は2回出るため、その確率は

$${}_6C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

となる。よって、求める確率は

$$\frac{35}{128} \cdot \frac{15}{64} = \frac{525}{8192}$$

となる。

(答) $\frac{525}{8192}$

(2)

点Aは点B、Cの両方を通ることはない。また(1)と同様に考えて、点Aが点Cを通り点Eに到達する確率は

$$\left\{{}_7C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} \cdot \left\{{}_6C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} = \frac{175}{2048}$$

となる。よって、求める確率は(1)の結果と合わせて

$$\frac{175}{2048} + \frac{525}{8192} = \frac{1225}{8192}$$

となる。

(答) $\frac{1225}{8192}$

(3)

点Aが7回目までの試行で点Bに到達する確率は(1)より $\frac{35}{128}$ である。また8回目の試行でD

に到達する確率は $\frac{1}{2}$ であり、9回目から13回目の試行でEに到達する確率は

$${}_5C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

である。よって求める確率は

$$\frac{35}{128} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} = \frac{175}{4096}$$

となる。

(答) $\frac{175}{4096}$

(4)

点Aが点Dを通り点Eに到達する確率は

$$\left\{{}_8C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4\right\} \cdot \left\{{}_5C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} = \frac{175}{2048}$$

となる。また、点Aが点Eに到達する確率は

$${}_{13}C_7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{429}{2048}$$

となる。よって(1)、(3)の結果と合わせて求める確率は

$$\frac{429}{2048} - \left(\frac{175}{2048} + \frac{525}{8192} - \frac{175}{4096}\right) = \frac{841}{8192}$$

となる。

(答) $\frac{841}{8192}$

(5)

〔ア〕

点Aが点B、C、Dのいずれか1点以上を通り点Eに到達する事象を X 、点Aが点B、Dの両方を通り点Eに到達する事象を Y とする。事象 Z が起こる確率を $P(Z)$ とすると、求める確率は

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)}$$

となるが、 $P(X \cap Y) = P(Y)$ であるから、

$$P(Y|X) = \frac{P(Y)}{P(X)}$$

となる。ここで $P(X)$ について考えると、点Dを通るとき点B、Cの一方を必ず通るため、事象 X が起こる確率は、点Aが2点B、Cのうち少なくとも1点を通り、かつ点Eに到達する確率に等しい。したがって、(2)より

$$P(X) = \frac{1225}{8192}$$

となる。また、 $P(Y)$ は(3)より

$$P(Y) = \frac{175}{4096}$$

であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} P(Y|X) &= \frac{P(Y)}{P(X)} \\ &= \frac{\frac{175}{4096}}{\frac{1225}{8192}} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2}{7}$

〔イ〕

点Aが (X, Y) に到達する確率は ${}_{13}C_X \left(\frac{1}{2}\right)^{13}$ であるから、 X の期待値 $E(X)$ は

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{X=0}^{13} {}_{13}C_X \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \cdot X \\ &= \frac{1}{2^{13}} \sum_{X=0}^{13} {}_{13}C_X \cdot X \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 ${}_{13}C_X = {}_{13}C_{13-X}$ であることから $E(X)$ は

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{2^{13}} \sum_{X=0}^{13} {}_{13}C_{13-X} \cdot X \\ &= \frac{1}{2^{13}} \sum_{X=0}^{13} {}_{13}C_X \cdot (13-X) \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表すこともできる。よって、①と②を辺々を加えると

$$\begin{aligned} 2E(X) &= \frac{1}{2^{13}} \sum_{X=0}^{13} {}_{13}C_X \cdot X + \frac{1}{2^{13}} \sum_{X=0}^{13} {}_{13}C_X \cdot (13-X) \\ &= \frac{13}{2^{13}} \sum_{X=0}^{13} {}_{13}C_X \\ \Leftrightarrow E(X) &= \frac{13}{2^{14}} \sum_{X=0}^{13} {}_{13}C_X \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \sum_{X=0}^{13} {}_{13}C_X &= (1+1)^{13} \\ &= 2^{13} \end{aligned}$$

より、期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = \frac{13}{2}$$

である。

(答) $\frac{13}{2}$