

2015年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて解答用紙の所定の箇所に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (7) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (8) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余白

余白

〔 I 〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ.

- (1) 初項が a_1 で公差が d である等差数列 $\{a_n\}$ について, $a_{27} = 20$, $a_{37} = 15$ が成り立っている. このとき, $a_1 =$ ア であり, $d =$ イ である. したがって $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n =$ ウ となる.

- (2) 2 曲線 $y = 4^x$ ($x \geq 0$) と $y = 8^x$ ($x \geq 0$) と直線 $x = 1$ に囲まれた部分を D とする. D の面積は エ であり, D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積は オ であり, D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積は カ である.

- (3) 双曲線

$$C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

上の点 $P\left(\frac{3}{\cos \theta}, 2 \tan \theta\right)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) における接線 ℓ の方程式は キ であり, 法線 m の方程式は ク である. また, m と x 軸の交点を $(X, 0)$ とし m と y 軸の交点を $(0, Y)$ とすると, X の範囲は ケ であり, Y の範囲は コ である.

〔 II 〕 n を正整数とし, e を自然対数の底とすると, 次の問いに答えよ.

- (1) a, b を定数として, 次の関数 $f(x)$ ($x > 0$) の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$$f(x) = x^{n+1} \{a \cos(\pi \log x) + b \sin(\pi \log x)\}$$

- (2) 次の定積分の値をそれぞれ求めよ.

$$I_n = \int_1^e x^n \cos(\pi \log x) dx, \quad J_n = \int_1^e x^n \sin(\pi \log x) dx$$

- (3) 次の極限值をそれぞれ求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{n+1}}{J_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_n}{I_n}$$

〔Ⅲ〕座標空間内の4点 $A(1, 2, 3)$, $B(2, 1, 5)$, $C(2, 3, -1)$, $P(2\cos\theta, \sin\theta, 0)$ を考える. ただし, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ.
- (2) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直で, 大きさが1のベクトルをすべて求めよ.
- (3) 点 P から, 3点 A, B, C を通る平面 α に, 下ろした垂線の足 H の座標を θ を用いて表せ.
- (4) 四面体 $PABC$ の体積 V を θ を用いて表せ.
- (5) 四面体 $PABC$ の体積 V の最大値と最小値を求めよ.

〔Ⅳ〕数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{6}{\sqrt{a_n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{6}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$ として, 次の問いに答えよ.

- (1) 閉区間 $4 \leq x \leq 9$ において, $f(x)$ の最大値と最小値, 導関数 $f'(x)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ.
- (2) $4 < a_n < 9$ を数学的帰納法を用いて示せ.
- (3) $c = f(c)$ を満たす正の実数 c を求めよ.
- (4) 上の (3) で決定した c に対して, $0 < c - a_{n+1} < \frac{c - a_n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ を示せ.
- (5) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

以下余白