

2015年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて解答用紙の所定の箇所に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (7) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (8) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

余白

〔 I 〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

- (1) さいころを n 回投げて、第 1 回から第 n 回までに出了目 n 個の積を X_n とする。 X_n が 3 で割り切れる確率は ア であり、 X_n が 2 で割り切れる確率は イ である。また、 X_n が 6 で割り切れる確率を p_n とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - p_n) =$ ウ である。

- (2) 連立不等式

$$x^2 + 4y^2 \leq 4, \quad x + 2y \geq 2$$

の表す領域を D とする。点 (x, y) が D 内を動くとき、 $2x + y$ の最小値は エ である。また、最大値は オ であり、そのときの x, y は $x =$ カ , $y =$ キ である。

- (3) 正整数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し $\int_0^\pi \sin^2 nx \, dx =$ ク であり、異なる正整数 m, n に対しては $\int_0^\pi \sin mx \sin nx \, dx =$ ケ である。したがって、 $f(x) = \sum_{n=1}^{15} n \sin nx$ とすると $\int_0^\pi \{f(x)\}^2 dx =$ コ である。

〔 II 〕 O を原点とする座標平面内に曲線 $C: y = \log(x+1)$, 点 $P(t, 0)$ と点 $Q(t, \log(t+1))$ を考える。ただし、 t は正の実数とする。次の問いに答えよ。

- (1) x 軸、直線 $x = t$ と曲線 C で囲まれた部分の面積 $S(t)$ を求めよ。
 (2) $\triangle OPQ$ の面積を $T(t)$ とする。次の極限値を求めよ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T(t)}{S(t)}$$

- (3) 点 Q における曲線 C の接線と y 軸の交点を R とする。 R の座標を求めよ。
 (4) 台形 $OPQR$ の面積を $U(t)$ とする。次の極限値を求めよ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{S(t)}$$

〔Ⅲ〕座標空間内の xy 平面上に 3 点 $A(-1, 5, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $C(-2, 0, 0)$ がある。また、点 $P(p, q, r)$ ($r > 0$) があり、 $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{PA}$ であるとする。次の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標 (p, q, r) を求めよ。
- (2) 四面体 $PABC$ の体積を求めよ。
- (3) 点 P から xy 平面に下ろした垂線の足 $H(p, q, 0)$ に対して、内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BH}$ をそれぞれ求めよ。

〔Ⅳ〕 $f(x) = 2^{-x} \cos x$ とし、曲線 $C: y = f(x)$ と正整数 n に対して、次の問いに答えよ。

- (1) 点 $P(n\pi, f(n\pi))$ における C の接線と x 軸の交点を A とする。 A の座標を求めよ。
- (2) 点 $P(n\pi, f(n\pi))$ における C の法線と x 軸の交点を B とする。 B の座標を求めよ。
- (3) 上の (1) と (2) で求めた点 A, B と点 P の 3 点でできる $\triangle ABP$ の面積 T_n を n を用いて表せ。
- (4) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ の和を求めよ。

以下余白

