

2015年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (7) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (8) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

〔Ⅰ〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

(1) 関数 $f(x) = 3^x$ の導関数は $f'(x) =$ $\bar{ア}$ であり、 $\int_0^2 f(x)dx =$ $\bar{イ}$ である。したがって、座標平面内において、点 $(1, 3)$ における曲線 $C: y = f(x)$ の接線 ℓ の方程式は $y =$ $\bar{ウ}$ であり、法線 m の方程式は $y =$ $\bar{エ}$ である。さらに、曲線 C 、接線 ℓ 、 y 軸と直線 $x = 2$ で囲まれた部分の面積は $\bar{オ}$ であり、法線 m と x 軸の交点の座標は ($\bar{カ}$, 0) である。

(2) 1 から 9 までの番号札 9 枚を入れた箱がある。その箱から番号札を 1 枚ずつ 2 回取り出して、その数を順に x, y とする。ただし、1 度取り出した札はもとに戻さないとする。 $\frac{y}{x}$ が整数になる確率は $\bar{キ}$ であり、 $\frac{y}{x} \leq \frac{1}{2}$ となる確率は $\bar{ク}$ であり、 $\frac{y}{x} \geq 3$ となる確率は $\bar{ケ}$ である。また、 $\frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 3$ となる確率は $\bar{コ}$ である。

〔Ⅱ〕 α は $0 < \alpha < \pi$ を満たす実数、 n, k は正整数として、次の問いに答えよ。

(1) $\sin \frac{\alpha}{2n} \sin \frac{k\alpha}{n}$ を $\cos \frac{(2k-1)\alpha}{2n}$ と $\cos \frac{(2k+1)\alpha}{2n}$ を用いて表せ。

(2) $\sum_{k=1}^n \sin \frac{k\alpha}{n}$ と極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\alpha}{2n}$ を求めよ。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{k\alpha}{n}$ を求めよ。

〔Ⅲ〕 θ_1, θ_2, a, b は $0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, $0 < a < b$ を満たす実数とする。連立不等式 $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, $0 \leq y \leq (\tan \theta_1)x$ の表す領域を D とし、連立不等式 $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, $(\tan \theta_1)x \leq y \leq (\tan \theta_2)x$ の表す領域を E とする。次の問いに答えよ。

(1) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(2) E を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 W を求めよ。

(3) 極限值 $\lim_{\theta_2 \rightarrow \theta_1 + 0} \frac{W}{\theta_2 - \theta_1}$ を求めよ。

[IV] 次の2問 [ア] , [イ] のうち1問を選択し答えよ. 解答用紙 [IV] の [] 内にアまたはイを記入すること.

[ア] $i = \sqrt{-1}$ とし, $\bar{z}$ は z の共役複素数を表すとする. 次の問いに答えよ.

- (1) 複素数 $z = 2 + i$ に対して, 複素数 $z_1 = (1 + \sqrt{3}i)\bar{z}$ の値を求めよ.
 (2) 実数 k と複素数 $z = 1 + ti$ (t は実数) に対して, 次の等式が成立する k, t の組をすべて求めよ.

$$(1 + \sqrt{3}i)\bar{z} = kz$$

- (3) 複素数 w_1 に対し, 複素数 w_2, w_3 を

$$w_2 = (1 + \sqrt{3}i)\bar{w}_1, w_3 = (1 + \sqrt{3}i)\bar{w}_2$$

によって定める. w_3 を w_1 を用いて表せ.

- (4) 上の (1) で求めた z_1 に対して, 複素数 $z_n (n = 2, 3, \dots)$ を

$$z_{n+1} = (1 + \sqrt{3}i)\bar{z}_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. $z_{2m-1} (m = 1, 2, 3, \dots)$ を m を用いて表せ.

[イ] 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の表す1次変換が点 $(2, 1)$ を点 P_1 に移すとする. P_1 の座標を求めよ.
 (2) 次の等式が成立する実数 k, t の組をすべて求めよ.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ kt \end{pmatrix}$$

- (3) A^2 を求めよ.
 (4) 行列 $A^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ の表す1次変換が点 $(2, 1)$ を点 P_n に移すとする. $P_{2m-1} (m = 1, 2, 3, \dots)$ の座標を求めよ.