

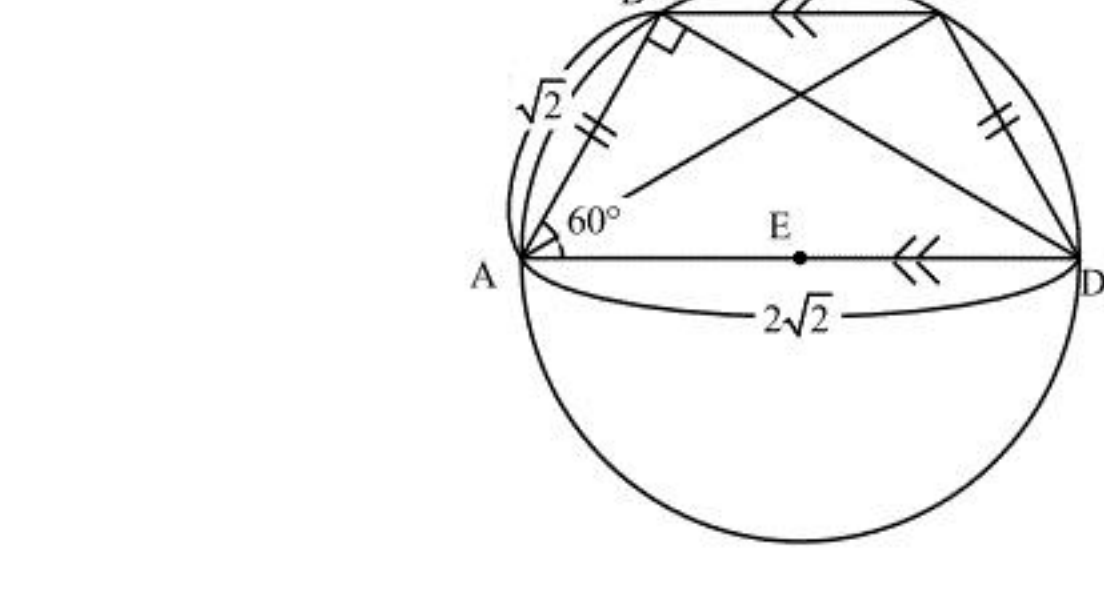
【Ⅰ】

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ
$\sqrt{2}$	$(0, 1, -2)$	$\frac{1}{2}$	$(1, 1, -1)$
オ	カ	キ	
$\sqrt{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right)$	$\frac{2}{3}a_n-1$	
ク	ケ	コ	
$\frac{1}{3}b_n-\frac{2}{3}a_n-2$	$3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-3$	$6\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-6\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	

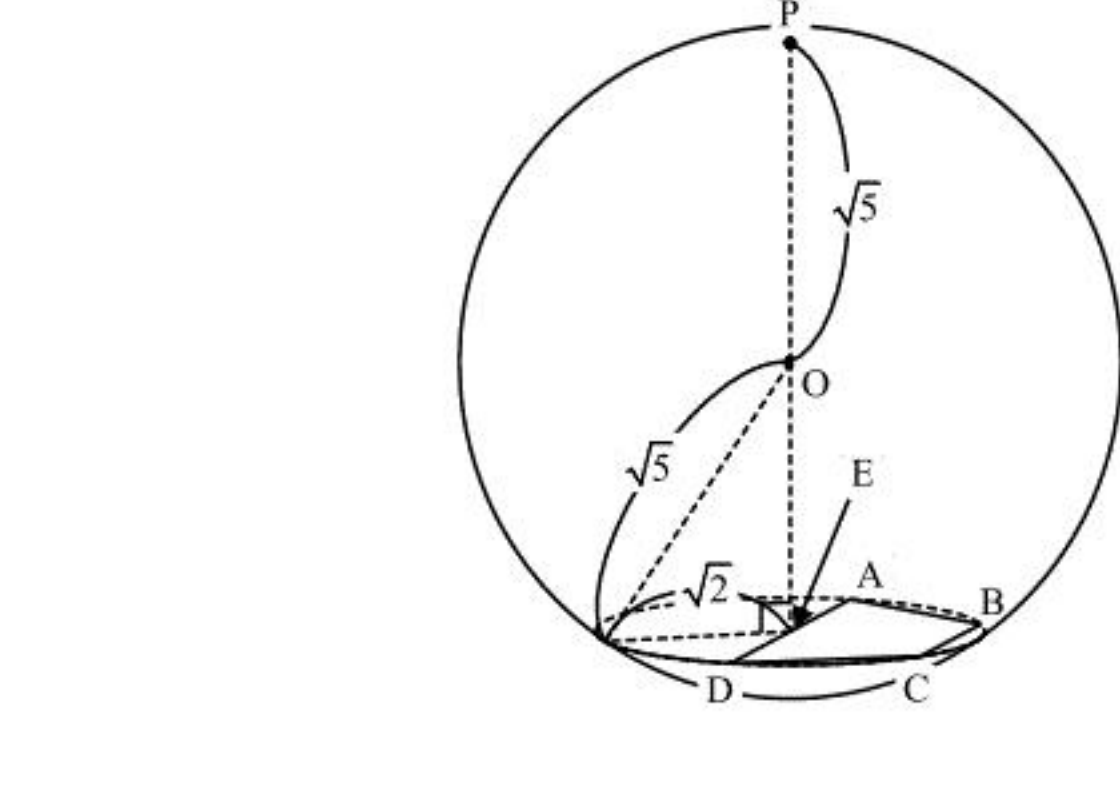
〔解説〕

- (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-1, 1, 0)$ であるから
- $$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2} \qquad \cdots \textcircled{1}$$
- である。また、 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-1, 0, -1)$ であるから、
- $$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}=(-2, 0, -2)$$
- となり、
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{OD}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD} \\ &=(2, 1, 0)+(-2, 0, -2) \\ &=(0, 1, -2)\end{aligned}$$
- となる。よって、点 D の座標は $(0, 1, -2)$ である。さらに、 $\overrightarrow{AD}=(-2, 0, -2)$ より
- $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=(-1)\cdot(-2)+1\cdot 0+0\cdot(-2)=2$$
- であり
- $$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{(-2)^2+0^2+(-2)^2}=2\sqrt{2} \qquad \cdots \textcircled{2}$$
- が成り立つ。したがって
- $$\begin{aligned}\cos\angle\text{BAD}&=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|} \\ &=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} \\ &=\frac{1}{2}\end{aligned}$$
- となる。よって、 $\angle\text{BAD}=60^\circ$ である。
- 次に、3 点 A, B, C を含む平面にあり、この 3 点を通る円を S とし、円 S の中心 E の座標と半径を求める。



- いま、 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=(0, -1, -1)$ より、
- $$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{CD}\right|&=\sqrt{0^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2} \\ \therefore\left|\overrightarrow{CD}\right|&=\left|\overrightarrow{AB}\right|\end{aligned}$$
- が成り立つ。 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$ より $BC\parallel AD$ であるから、四角形 ABCD は等脚台形である。したがって、上図より
- $$\angle\text{BCD}=180^\circ-\angle\text{CDA}=180^\circ-\angle\text{BAD}$$
- であるから四角形 ABCD は円に内接する。すなわち、円 S は点 D を通る。また、 $\angle\text{BAD}=60^\circ$ であり、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より $AB:AD=1:2$ であるから、 $\triangle\text{ABD}$ は $\angle\text{ABD}=90^\circ$ の直角三角形である。よって、線分 AD は円 S の直径であるから、円 S の中心 E は線分 AD の中点であり、その座標は
- $$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{0+(-2)}{2}\right)=(1, 1, -1)$$
- となる。また、円 S の半径は
- $$\left|\overrightarrow{AE}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{2}$$
- となる。

- 最後に、原点を中心とし、4 点 A, B, C, D を通る球面を T とする。四角形 ABCD を底面とし、 T 上の点 P を頂点に持つ四角錐について、その体積が最大となるような点 P の座標を求める。球の半径は $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{2^2+1^2+0^2}=\sqrt{5}$ である。四角形 ABCD を底面とする四角錐が最大となるのは球上の点 P と四角形 ABCD の距離が最大のとき、すなわち、下図のように、 $\overrightarrow{OP}$ が 3 点 A, B, C を通る平面に垂直で、かつ点 P が四角形 ABCD に対して原点と同じ側にあるときである。



- $$\left|\overrightarrow{OE}\right|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$$
- であるから、このとき
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\overrightarrow{OE} \\ &=-\frac{\sqrt{15}}{3}(1, 1, -1) \\ &=\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right)\end{aligned}$$
- となる。ゆえに点 P の座標は $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right)$ となる。

(2)

- $f_n'(x)=3x^2+2a_nx+b_n$ であるから、条件より
- $$\begin{aligned}f_{n+1}(x)&=\frac{1}{3}(x-1)(3x^2+2a_nx+b_n)-2x+\frac{1}{3}b_n+1 \\ &=x^3+\left(\frac{2}{3}a_n-1\right)x^2+\left(\frac{1}{3}b_n-\frac{2}{3}a_n-2\right)x+1\end{aligned}$$
- となる。一方、 $f_{n+1}(x)=x^3+a_{n+1}x^2+b_{n+1}x+1$ であるから、係数を比較して
- $$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n-1 \qquad \cdots \textcircled{1}$$
- $$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n-\frac{2}{3}a_n-2 \qquad \cdots \textcircled{2}$$
- である。また $f_1(x)=x^3+1$ より $a_1=0, b_1=0$ である。 $\textcircled{1}$ より、
- $$a_{n+1}+3=\frac{2}{3}(a_n+3)$$
- となるから、数列 $\{a_n+3\}$ は初項 $a_1+3=3$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であり、
- $$\begin{aligned}a_n+3&=3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n&=3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-3\end{aligned}$$
- となる。これを $\textcircled{2}$ に代入して整理すると
- $$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n-3\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
- となる。両辺に $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ をかけると
- $$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^nb_n-\frac{9}{2}$$
- となり、
- $$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}b_{n+1}+9=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^nb_n+9\right\}$$
- と変形できるから、数列 $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^nb_n+9\right\}$ は初項 $\frac{3}{2}b_1+9=9$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。したがって
- $$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}\right)^nb_n+9&=9\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow b_n&=6\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-6\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$
- となる。

〔Ⅱ〕

(1)

2つの方程式

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$-x^3-cx^2-bx-a=0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

について、共通解を X とおく。①+②を考えると、

$$(X^3+ax^2+bx+c)+(-X^3-cX^2-bX-a)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-c)X^2+(c-a)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-c)(X-1)(X+1)=0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。 λ, μ は①、②の共通解であるから、③を満たす。 $a \neq c, \lambda > \mu$ より $\lambda=1, \mu=-1$ となる。

(答) $\lambda=1, \mu=-1$

(2)

3次方程式 $f(x)=0$ の $\lambda(=1), \mu(=-1)$ とは異なる解を α とおく。解と係数の関係より、

$$\begin{cases} -a=1+(-1)+\alpha \\ b=1\cdot(-1)+(-1)\cdot\alpha+\alpha\cdot1 \\ -c=1\cdot(-1)\cdot\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-\alpha \\ b=-1 \\ c=\alpha \end{cases}$$

である。したがって、 $b=-1$ であり、 α を消去すれば $c=-a$ となる。

(答) $b=-1, c=-a$

(3)

(2)の結果を用いて関数 $f(x), g(x)$ を a, x のみで表すと

$$f(x)=x^3+ax^2-x-a$$

$$g(x)=-x^3+ax^2+x-a$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= (x^3+ax^2-x-a)-(-x^3+ax^2+x-a) \\ &= 2x^3-2x \\ &= 2(x-1)x(x+1) \end{aligned}$$

であるから、 $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの上下関係は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f(x)-g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
上下関係	$g(x)$ が上	一致	$f(x)$ が上	一致	$g(x)$ が上	一致	$f(x)$ が上

上表より、 $y=f(x), y=g(x)$ で囲まれた2つの部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \{f(x)-g(x)\} dx + \int_0^1 \{g(x)-f(x)\} dx &= \int_{-1}^0 (2x^3-2x) dx + \int_0^1 (2x-2x^3) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{2} - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[x^2 - \frac{x^4}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) 1

【Ⅲ】

(1)

$n=3$ のとき、すべての取り出し方は 3^3 通りあり、これらは同様に確からしい。求める確率は $x_1 \times x_2 \times x_3 = 2 \times 3$ となる確率である。 $x_1 \times x_2 \times x_3 = 2 \times 3$ となるとき、 (x_1, x_2, x_3) は $(1, 2, 3)$ またはその並べ替えである。並べ替え方は $3!$ 通りあるから、求める確率は

$$\frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9}$$

である。

(答) $\frac{2}{9}$

(2)

$y_3 = \frac{x_1 \times x_2 \times x_3}{6}$ が整数にならない確率を求める。整数にならないのは、 $x_1 \times x_2 \times x_3$ が 2 または 3 で割り切れない場合である。 2 で割り切れないのは、 x_1, x_2, x_3 がそれぞれ $1, 3$ のいずれかであるときだから、 2^3 通りある。同様に 3 で割り切れないのは、 x_1, x_2, x_3 がそれぞれ $1, 2$ のいずれかであるときだから、 2^3 通りある。また、 2 でも 3 でも割り切れないのは、すべて 1 のときだから 1 通りである。よって y_3 が整数にならない確率は

$$\frac{2^3 + 2^3 - 1}{3^3} = \frac{5}{9}$$

である。したがって、求める確率は

$$1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

である。

(答) $\frac{4}{9}$

(3)

$n=4$ のとき、すべての取り出し方は 4^4 通りあり、これらは同様に確からしい。求める確率は $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 = 4! = 2^3 \cdot 3$ となる確率である。このとき (x_1, x_2, x_3, x_4) は $(1, 2, 3, 4), (2, 2, 2, 3)$ またはその並べ替えである。 $(1, 2, 3, 4), (2, 2, 2, 3)$ の並べ替え方はそれぞれ $4! = 24$ 通り、

$\frac{4!}{3!} = 4$ 通りあるから、求める確率は

$$\frac{24 + 4}{4^4} = \frac{7}{64}$$

である。

(答) $\frac{7}{64}$

(4)

$n=6$ のとき、すべての取り出し方は 6^6 通りあり、これらは同様に確からしい。求める確率は $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x_5 \times x_6 = 6! = 2^4 \times 3^2 \times 5$ となる確率である。このとき、 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ は $(1, 1, 4, 5, 6, 6), (1, 2, 2, 5, 6, 6), (1, 2, 3, 4, 5, 6),$
 $(2, 2, 2, 3, 5, 6), (1, 3, 3, 4, 4, 5), (2, 2, 3, 3, 4, 5)$

またはその並び替えとなる。並べ替え方の場合の数は、それぞれ

$$(1, 1, 4, 5, 6, 6) \text{ のとき, } \frac{6!}{2!2!} = 180 \text{ 通り}$$

$$(1, 2, 2, 5, 6, 6) \text{ のとき, } \frac{6!}{2!2!} = 180 \text{ 通り}$$

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6) \text{ のとき, } 6! = 720 \text{ 通り}$$

$$(2, 2, 2, 3, 5, 6) \text{ のとき, } \frac{6!}{3!} = 120 \text{ 通り}$$

$$(1, 3, 3, 4, 4, 5) \text{ のとき, } \frac{6!}{2!2!} = 180 \text{ 通り}$$

$$(2, 2, 3, 3, 4, 5) \text{ のとき, } \frac{6!}{2!2!} = 180 \text{ 通り}$$

となる。以上より、求める確率は

$$\frac{180 \cdot 4 + 720 + 120}{6^6} = \frac{65}{1944}$$

である。

(答) $\frac{65}{1944}$

(5)

y_6 が $y_6 \leq 2$ を満たす整数であるとき、 $y_6 = 1$ または 2 である。よって、 $y_6 = 1$ となる確率を p_1 、 $y_6 = 2$ となる確率を p_2 とすると、 y_6 が $y_6 \leq 2$ を満たす整数であるときに $y_6 = 1$ となる条件付確率は、

$$\frac{p_1}{p_1 + p_2}$$

である。(4)より、 $p_1 = \frac{65}{1944}$ である。 p_2 を求める。すなわち、 $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 \times x_5 \times x_6 = 2 \times 6! = 2^5 \times 3^2 \times 5$ となる確率を求める。このとき、 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ は

$$(1, 2, 4, 5, 6, 6), (1, 3, 4, 4, 5, 6), (2, 2, 2, 5, 6, 6)$$

$$(2, 2, 3, 4, 5, 6), (2, 3, 3, 4, 4, 5)$$

またはその並び替えとなる。並べ替え方の場合の数は、それぞれ

$$(1, 2, 4, 5, 6, 6) \text{ のとき, } \frac{6!}{2!} = 360 \text{ 通り}$$

$$(1, 3, 4, 4, 5, 6) \text{ のとき, } \frac{6!}{2!} = 360 \text{ 通り}$$

$$(2, 2, 2, 5, 6, 6) \text{ のとき, } \frac{6!}{3!2!} = 60 \text{ 通り}$$

$$(2, 2, 3, 4, 5, 6) \text{ のとき, } \frac{6!}{2!} = 360 \text{ 通り}$$

$$(2, 3, 3, 4, 4, 5) \text{ のとき, } \frac{6!}{2!2!} = 180 \text{ 通り}$$

となる。以上より、 $y_6 = 2$ となる確率は、

$$p_2 = \frac{360 \cdot 3 + 60 + 180}{6^6} = \frac{55}{1944}$$

である。したがって求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{65}{1944}}{\frac{65}{1944} + \frac{55}{1944}} = \frac{13}{24}$$

となる。

(答) $\frac{13}{24}$