

【1】

【解答】

ア	イ	ウ	
$\frac{8}{3}$	$\frac{27}{4}$	$x=-1, 2, 3$	
エ	オ	カ	キ
$\frac{5}{2}$	$\frac{70+26\sqrt{13}}{27}$	$\frac{169}{12}$	$x+6$
ク	ケ	コ	
$\frac{4}{5}$	2	$2-\sqrt{5} \leq s < 4$	

【解説】

(1)

$\int_{-2}^2 f(t) dt = A, \int_0^3 f(t) dt = B$ とおく。すると、

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}Ax^2 + x + \frac{8}{9}B$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 f(t) dt \\ &= \int_{-2}^2 \left(t^3 - \frac{3}{2}At^2 + t + \frac{8}{9}B \right) dt \\ &= 2 \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}At^2 + \frac{8}{9}B \right) dt \\ &= 2 \left[-\frac{1}{2}At^3 + \frac{8}{9}Bt \right]_0^2 \\ &= -8A + \frac{32}{9}B \end{aligned}$$

より、

$$81A = 32B \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。また、

$$\begin{aligned} B &= \int_0^3 f(t) dt \\ &= \int_0^3 \left(t^3 - \frac{3}{2}At^2 + t + \frac{8}{9}B \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{A}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{8}{9}Bt \right]_0^3 \\ &= -\frac{27}{2}A + \frac{8}{3}B + \frac{99}{4} \end{aligned}$$

より、

$$162A = 20B + 297 \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

である。①②を連立して解くと、

$$\int_{-2}^2 f(t) dt = A = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^3 f(t) dt = B = \frac{27}{4}$$

が得られる。したがって、 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 4x^2 + x + 6 \\ &= (x+1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

となるから、3次方程式 $f(x) = 0$ の解は、

$$x = -1, 2, 3$$

である。また、 $1 \leq x < 2$ のとき $f(x) > 0$ 、 $2 \leq x \leq 3$ のとき $f(x) \leq 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_1^3 |f(x)| dx &= \int_1^2 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx \\ &= \int_1^2 (x^3 - 4x^2 + x + 6) dx - \int_2^3 (x^3 - 4x^2 + x + 6) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_1^2 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_2^3 \\ &= \left(\frac{15}{4} - \frac{28}{3} + \frac{3}{2} + 6 \right) - \left(\frac{65}{4} - \frac{76}{3} + \frac{5}{2} + 6 \right) \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。 $f(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 8x + 1 \\ &= 3 \left(x - \frac{4+\sqrt{13}}{3} \right) \left(x - \frac{4-\sqrt{13}}{3} \right) \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	...	$\frac{4-\sqrt{13}}{3}$	...	$\frac{4+\sqrt{13}}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より、 $y = f(x)$ の極大値 M は、 $\alpha = \frac{4-\sqrt{13}}{3}$ とおくと、 $M = f(\alpha)$ である。

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3\alpha^2 - 8\alpha + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 &= \frac{8\alpha-1}{3} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} M = f(\alpha) &= \alpha^3 - 4\alpha^2 + \alpha + 6 \\ &= \alpha \cdot \frac{8\alpha-1}{3} - 4 \cdot \frac{8\alpha-1}{3} + \alpha + 6 \\ &= \frac{8}{3}\alpha^2 - 10\alpha + \frac{22}{3} \\ &= \frac{8}{3} \cdot \frac{8\alpha-1}{3} - 10\alpha + \frac{22}{3} \\ &= -\frac{26}{9}\alpha + \frac{58}{9} \\ &= -\frac{26}{9} \cdot \frac{4-\sqrt{13}}{3} + \frac{58}{9} \\ &= \frac{70+26\sqrt{13}}{27} \end{aligned}$$

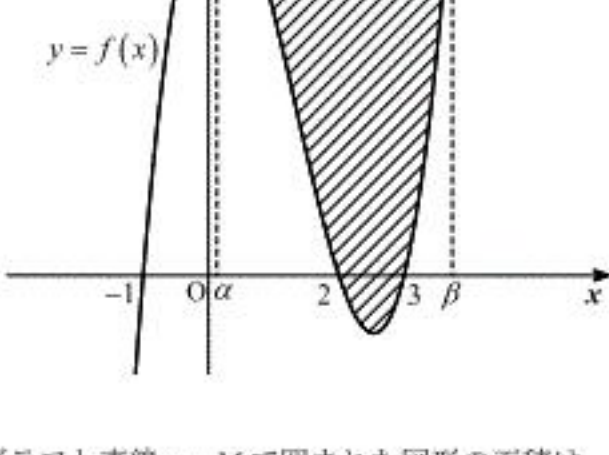
となる。次に、 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = M$ の交点について考える。この交点は方程式 $f(x) = M$ の解であり、 $y = f(x)$ のグラフと $y = M$ のグラフは $x = \alpha$ で接することから、 α は方程式 $f(x) = M$ の重解である。残り1つの解を β とすると、方程式

$$f(x) = M \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 - M = 0$$

について、解と係数の関係より

$$\alpha + \alpha + \beta = 4 \Leftrightarrow \beta = 4 - 2\alpha$$

が成り立つ。



よって、 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = M$ で囲まれた図形の面積は、

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \{M - f(x)\} dx &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 (x - \beta) dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 \{(x - \alpha) - (\beta - \alpha)\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \{(x - \alpha)^3 - (\beta - \alpha)(x - \alpha)^2\} dx \\ &= - \left[\frac{(x - \alpha)^4}{4} - \frac{\beta - \alpha}{3} (x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^4}{12} \\ &= \frac{\{(4 - 2\alpha) - \alpha\}^4}{12} \\ &= \frac{(\sqrt{13})^4}{12} \\ &= \frac{169}{12} \end{aligned}$$

となる。また、点 $(0, f(0))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線は、

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x - 0) + f(0) \\ \Leftrightarrow y &= x + 6 \end{aligned}$$

となる。

(2)

真数条件は

$$\begin{aligned} 4x - x^2 &> 0, x - s > 0 \\ \Leftrightarrow 0 &< x < 4, x > s \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} \log_2(x - s) + 1 &= \log_4(x - s)^2 + \log_4 4 \\ &= \log_4 4(x - s)^2 \end{aligned}$$

であることから、方程式 $\log_4(4x - x^2) = \log_2(x - s) + 1$ は、真数条件の下で

$$4x - x^2 = 4(x - s)^2$$

と同値である。 $s = 0$ のとき、この方程式は

$$\begin{aligned} 4x - x^2 &= 4x^2 \\ \Leftrightarrow x(5x - 4) &= 0 \end{aligned}$$

と変形できる。このとき、真数条件は $0 < x < 4$ であるから、この方程式を満たす解は $x = \frac{4}{5}$ である。

また、 $s = 1$ のとき、方程式は

$$\begin{aligned} 4x - x^2 &= 4(x - 1)^2 \\ \Leftrightarrow 5x^2 - 12x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(5x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

と変形できる。このとき、真数条件は $1 < x < 4$ であるから、この方程式を満たす解は $x = 2$ である。

次に、方程式が解をもつような s の条件を考える。そこで、

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(x - s)^2 - (4x - x^2) \\ &= 5x^2 - 2(4s + 2)x + 4s^2 \end{aligned}$$

とおき、真数条件を満たす範囲での $y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点について考える。判別式を D とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (4s + 2)^2 - 5 \cdot 4s^2 \\ &= -4s^2 + 16s + 4 \end{aligned}$$

であり、このグラフの軸は

$$x = \frac{4s + 2}{5}$$

である。また、

$$f(0) = 4s^2 \geq 0$$

$$f(4) = 4s^2 - 32s + 64 = 4(s - 4)^2 \geq 0$$

である。

[1] $s < 0$ のとき

このとき、真数条件は $0 < x < 4$ であり、 $f(0) > 0, f(4) > 0$ となるので、交点を持つ条件は

$$\begin{cases} \frac{D}{4} \geq 0 \\ 0 < \frac{4s + 2}{5} < 4 \end{cases}$$

である。よって、 $2 - \sqrt{5} \leq s \leq 2 + \sqrt{5}$ かつ $-\frac{1}{2} < s < \frac{9}{2}$ であり、 $s < 0$ から

$$2 - \sqrt{5} \leq s < 0$$

となる。

[2] $s = 0$ のとき

このとき、上で求めた通り、 $x = \frac{4}{5}$ を解にもつ。

[3] $0 < s < 4$ のとき

このとき、真数条件は $s < x < 4$ であり、 $f(4) > 0$ である。また、

$$\begin{aligned} f(s) &= 4(s - s)^2 - (4s - s^2) \\ &= s(s - 4) \\ &< 0 \end{aligned}$$

であることから $y = f(x)$ のグラフは $s < x < 4$ の範囲で x 軸と交わる。

[4] $s \geq 4$ のとき

このとき、真数条件である

$$0 < x < 4, x > s$$

を満たす実数 x は存在しない。よって、交点を持たない。

以上[1], [2], [3], [4]より、方程式 $\log_4(4x - x^2) = \log_2(x - s) + 1$ が解をもつような s の範囲は

$$2 - \sqrt{5} \leq s < 4$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

x, y は辺の長さだから、 $x > 0, y > 0$ である。 $x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$ であることから

$$\begin{aligned} x &> 0, y > 0 \\ \Leftrightarrow x &> 0, 2 - x > 0 \\ \Leftrightarrow 0 &< x < 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。また、長方形 R の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= xy \\ &= x(2 - x) \\ &= -(x - 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。 $x = 1$ は①の範囲に含まれるから、長方形 R の面積 S は、 $x = 1, y = 2 - 1 = 1$ のとき、最大値 1 をとる。

(答) $x = 1, y = 1$

(2)

x, y, z は直方体の辺の長さなので、

$$x > 0, y > 0, z > 0$$

である。また、直方体 C の体積を V とおくと

$$V = xyz$$

であり、

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ 2(xy + yz + zx) &= 72 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 36 \end{aligned}$$

であるから、解と係数の関係より、3 次方程式

$$t^3 - 12t^2 + 36t - V = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

は x, y, z を解にもつ。よって、直方体 C が存在するためには、この方程式を満たす正の実数解が重解を含めて 3 つ存在すればよい。方程式②の実数解は、 $y = t^3 - 12t^2 + 36t$ のグラフと $y = V$ ($V > 0$) のグラフの共有点の t 座標である。よって、求める範囲は、2 つのグラフが $t > 0$ の範囲に 3 つの共有点をもつときの共有点の t 座標のとりうる値の範囲である。ただし、共有点の個数は重複を含めて考える。

$$f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$$

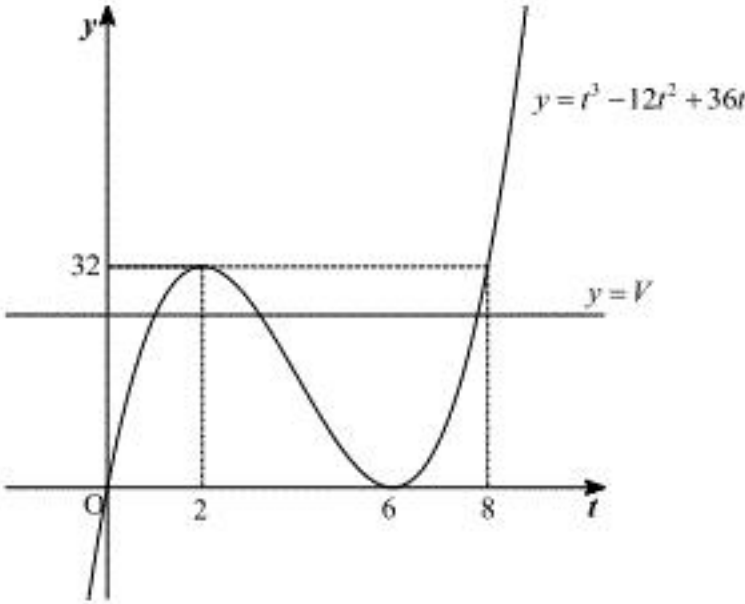
とおくと

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3t^2 - 24t + 36 \\ &= 3(t - 2)(t - 6) \end{aligned}$$

であるから、 $f(t)$ についての増減表は次のようになる。

t	...	2	...	6	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$

これより、グラフは下図のようになる。



図より、条件を満たすのは $0 < V \leq 32$ のときである。 $V = 32$ のとき、方程式②は

$$\begin{aligned} t^3 - 12t^2 + 36t &= 32 \\ \Leftrightarrow (t - 2)^2(t - 8) &= 0 \end{aligned}$$

となるから、共有点の t 座標は $t = 2, 8$ である。よって、共有点の t 座標のとりうる値の範囲は、

$$0 < t < 6, 6 < t \leq 8$$

である。すなわち、直方体 C が存在するための x の値の範囲は

$$0 < x < 6, 6 < x \leq 8$$

である。

(答) $0 < x < 6, 6 < x \leq 8$

(3)

直方体 C の体積 V が最大るとき、(2)より $V = 32$ である。このとき、方程式②は

$$(t - 2)^2(t - 8) = 0 \text{ となるから、} x, y, z \text{ の値は}$$

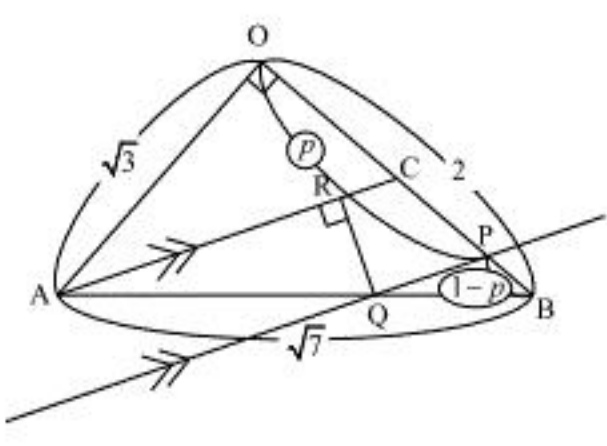
$$(x, y, z) = (2, 2, 8), (2, 8, 2), (8, 2, 2)$$

である。

(答) $(x, y, z) = (2, 2, 8), (2, 8, 2), (8, 2, 2)$

【Ⅲ】

(1)



$OC:CB=1:1$, $OP:PB=p:(1-p)$ より $OC:CP:PB=\frac{1}{2}:\left(p-\frac{1}{2}\right):(1-p)$ である。 $AC//QP$ より,

$$AQ:QB=CP:PB=\left(p-\frac{1}{2}\right):(1-p)$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \frac{1-p}{p-\frac{1}{2}+1-p}\overrightarrow{OA} + \frac{p-\frac{1}{2}}{p-\frac{1}{2}+1-p}\overrightarrow{OB} \\ &= 2(1-p)\vec{a} + (2p-1)\vec{b}\end{aligned}$$

である。また、点 R は直線 AC 上にあるから、実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OC} \\ &= (1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

とかける。ここで、 $AC \perp RQ$ であることから

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{RQ} = 0$$

である。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \\ &= -\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} \\ \overrightarrow{RQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} \\ &= (1-2p+t)\vec{a} + \left(2p-1-\frac{t}{2}\right)\vec{b}\end{aligned}$$

を代入して,

$$\left(-\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}\right) \cdot \left\{(1-2p+t)\vec{a} + \left(2p-1-\frac{t}{2}\right)\vec{b}\right\} = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 $|\vec{a}|^2=3, |\vec{b}|^2=4$ であり、 $BA^2=7=OA^2+OB^2$ より $\angle AOB=90^\circ$, すなわち

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\textcircled{1} &\Leftrightarrow -(1-2p+t) \cdot 3 + \frac{1}{2} \left(2p-1-\frac{t}{2}\right) \cdot 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow -4t + 10p - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{10p-5}{4}\end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} \\ &= \frac{9-10p}{4}\vec{a} + \frac{10p-5}{8}\vec{b}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OQ} = 2(1-p)\vec{a} + (2p-1)\vec{b}$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{9-10p}{4}\vec{a} + \frac{10p-5}{8}\vec{b}$$

(2)

$\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle BCQ$ の面積を S_2 とする。いま、 $\angle AOB=90^\circ$ であるから,

$$S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = \sqrt{3}$$

であり,

$$S_2 = \frac{BC}{OB} \cdot \frac{QB}{AB} \cdot S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-p}{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{3} = (1-p)\sqrt{3}$$

である。したがって、四角形 OAQC の面積 T は,

$$\begin{aligned}T &= S_1 - S_2 \\ &= \sqrt{3} - (1-p)\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3}p\end{aligned}$$

となる。

(答) $T = \sqrt{3}p$

(3)

点 R が線分 AC 上にある条件は、 $0 < t < 1$ となることである。(1)より、 $t = \frac{10p-5}{4}$ であるから,

$$\begin{aligned}0 &< \frac{10p-5}{4} < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} < p < \frac{9}{10}\end{aligned}$$

となる。 p はその定義から $\frac{1}{2} < p < 1$ であるから、求める p の値の範囲は

$$\frac{1}{2} < p < \frac{9}{10}$$

である。

(答) $\frac{1}{2} < p < \frac{9}{10}$

(4)

$\triangle AQC$ の面積を S_3 とおくと、 p が $\frac{1}{2} < p < \frac{9}{10}$ の範囲にあるとき、 $\triangle CQR$ の面積 U は

$$\begin{aligned}U &= S_3 \cdot \frac{CR}{AC} \\ &= S_2 \cdot \frac{AQ}{QB} \cdot \frac{CR}{AC} \\ &= (1-p)\sqrt{3} \cdot \frac{p-\frac{1}{2}}{1-p} \cdot \left(1 - \frac{10p-5}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} (2p-1)(9-10p)\end{aligned}$$

となる。

(答) $U = \frac{\sqrt{3}}{8} (2p-1)(9-10p)$

(5)

(4)より、 $\triangle CQR$ の面積 U は p が $\frac{1}{2} < p < \frac{9}{10}$ を満たすとき

$$\begin{aligned}U &= \frac{\sqrt{3}}{8} (2p-1)(9-10p) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} (-20p^2 + 28p - 9) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} \left\{ -20 \left(p - \frac{7}{10} \right)^2 + \frac{4}{5} \right\}\end{aligned}$$

である。 $\frac{1}{2} < \frac{7}{10} < \frac{9}{10}$ であるから、 U は $p = \frac{7}{10}$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{3}}{10}$ をとる。

(答) $p = \frac{7}{10}$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{3}}{10}$