

【I】

【解答】

ア	イ		ウ
15 <i>a</i>	$\sqrt{70}a$		0
エ	オ		カ
1	0		$k > -\frac{13}{4}$
キ	ク	ケ	コ
$-\frac{11}{4}$	$\frac{5-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$

【解説】

(1)

x のデータ平均値 $\bar{x}$ は、

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{29} \sum_{i=1}^{29} x_i \\ &= \frac{a}{29} \sum_{i=1}^{29} i \\ &= \frac{a}{29} \cdot \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot (29+1) \\ &= 15a\end{aligned}$$

である。標準偏差 s_x は

$$\begin{aligned}s_x &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{29} (x_i - \bar{x})^2}{29}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{29}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{29} (i-15)^2} \quad (\because a > 0) \\ &= \frac{a}{\sqrt{29}} \cdot \sqrt{(-14)^2 + \cdots + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + \cdots + 14^2} \\ &= \frac{a}{\sqrt{29}} \cdot \sqrt{2 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + 14^2)} \\ &= \frac{a}{\sqrt{29}} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{14}{6} \cdot (14+1)(2 \cdot 14+1)} \\ &= \frac{a}{\sqrt{29}} \cdot \sqrt{29 \cdot 70} \\ &= \sqrt{70}a\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}z_i &= \frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \\ &= \frac{ai - 15a}{\sqrt{70}a} \\ &= \frac{i-15}{\sqrt{70}}\end{aligned}$$

である。一方、 z のデータ平均値 $\bar{z}$ と標準偏差 s_z について、

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{29} \sum_{i=1}^{29} z_i \\ &= \frac{1}{29} \sum_{i=1}^{29} \frac{i-15}{\sqrt{70}} \\ &= \frac{1}{29} \cdot \frac{-14-13-\cdots-1+0+1+\cdots+13+14}{\sqrt{70}} \\ &= 0 \\ s_z &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{29} (z_i - \bar{z})^2}{29}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{29 \cdot 70}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{29} (i-15)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{29 \cdot 70}} \cdot \sqrt{29 \cdot 70} \\ &= 1\end{aligned}$$

が成立する。また、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{29} z_i^3 &= \sum_{i=1}^{29} \left(\frac{i-15}{\sqrt{70}} \right)^3 \\ &= \frac{(-14)^3 + (-13)^3 + \cdots + (-1)^3 + 0 + 1^3 + \cdots + 13^3 + 14^3}{70\sqrt{70}} \\ &= 0\end{aligned}$$

である。

(2)

放物線 C と直線 ℓ が異なる 2 点で交わる時、

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 3 &= x + k \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 - k &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

の判別式 D について $D > 0$ が成立する。したがって、

$$\begin{aligned}5^2 - 4(3 - k) &> 0 \\ \therefore k &> -\frac{13}{4}\end{aligned}$$

である。また、 $f'(x) = 2x - 4$ より、接線 m_1, m_2 の傾きはそれぞれ $2p - 4, 2q - 4$ となる。2 直線 m_1, m_2 が垂直に交わる時、それぞれの傾きの積は -1 となるから、

$$\begin{aligned}(2p - 4)(2q - 4) &= -1 \\ \Leftrightarrow 4\{pq - 2(p + q) + 4\} &= -1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。また、 p, q は方程式①の解でもあるから、解と係数の関係より

$$p + q = 5, pq = 3 - k$$

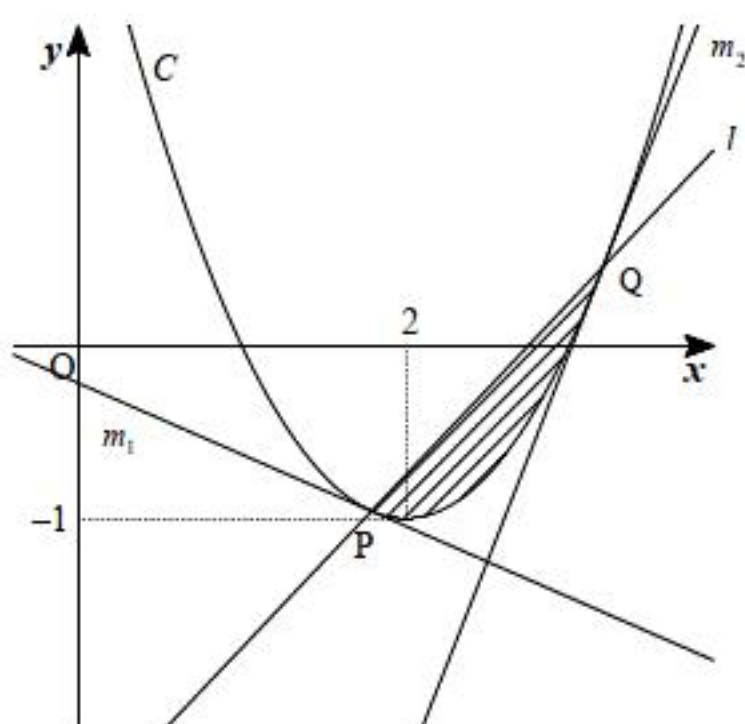
である。これを②へ代入し k について解くと

$$\begin{aligned}4(3 - k - 2 \cdot 5 + 4) &= -1 \\ \therefore k &= -\frac{11}{4}\end{aligned}$$

を得る。これを方程式①へ代入すると

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + \frac{23}{4} &= 0 \\ \therefore x &= \frac{5 \pm \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

であるから、 $p = \frac{5 - \sqrt{2}}{2}, q = \frac{5 + \sqrt{2}}{2}$ ($\because p < q$) となる。このとき、放物線 C と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を示すと、以下の斜線部となる。



上図より、

$$\begin{aligned}\int_p^q \left\{ (x+k) - (x^2 - 4x + 3) \right\} dx &= -\int_p^q (x-p)(x-q) dx \\ &= \frac{1}{6} (q-p)^3 \\ &= \frac{1}{6} \cdot (\sqrt{2})^3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

$$x^3 - 7x^2 + p = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$g_n = a^n + b^n + c^n \quad (n=1, 2, 3, 4) \quad \dots \textcircled{2}$$

であり、解と係数の関係から

$$a+b+c=7 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$ab+bc+ca=0 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$abc=-p$$

が成り立つ。

(1)

②, ③, ④より

$$g_1 = a+b+c$$

$$= 7$$

$$g_2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$$

$$= 7^2 - 2 \cdot 0$$

$$= 49$$

である。

(答) $g_1 = 7, g_2 = 49$

(2)

a は①の解であるから、

$$a^3 - 7a^2 + p = 0 \Leftrightarrow a^3 = 7a^2 - p$$

である。同様に $b^3 = 7b^2 - p, c^3 = 7c^2 - p$ が成り立つから、

$$g_3 = a^3 + b^3 + c^3$$

$$= 7a^2 - p + 7b^2 - p + 7c^2 - p$$

$$= 7(a^2 + b^2 + c^2) - 3p$$

$$= 7g_2 - 3p$$

$$= 343 - 3p$$

を得る。また、 a^4 を次数下げすると

$$a^4 = a \cdot a^3$$

$$= a(7a^2 - p)$$

$$= 7a^3 - ap$$

であるから、同様に $b^4 = 7b^3 - bp, c^4 = 7c^3 - cp$ が成り立つ。したがって

$$g_4 = a^4 + b^4 + c^4$$

$$= 7a^3 - ap + 7b^3 - bp + 7c^3 - cp$$

$$= 7(a^3 + b^3 + c^3) - p(a+b+c)$$

$$= 7g_3 - g_1 p$$

$$= 2401 - 28p$$

を得る。

(答) $g_3 = 343 - 3p, g_4 = 2401 - 28p$

(3)

①を変形すると

$$-x^3 + 7x^2 = p$$

となるから、方程式①の実数解は、関数 $y = -x^3 + 7x^2$ と直線 $y = p$ の交点の x 座標である。

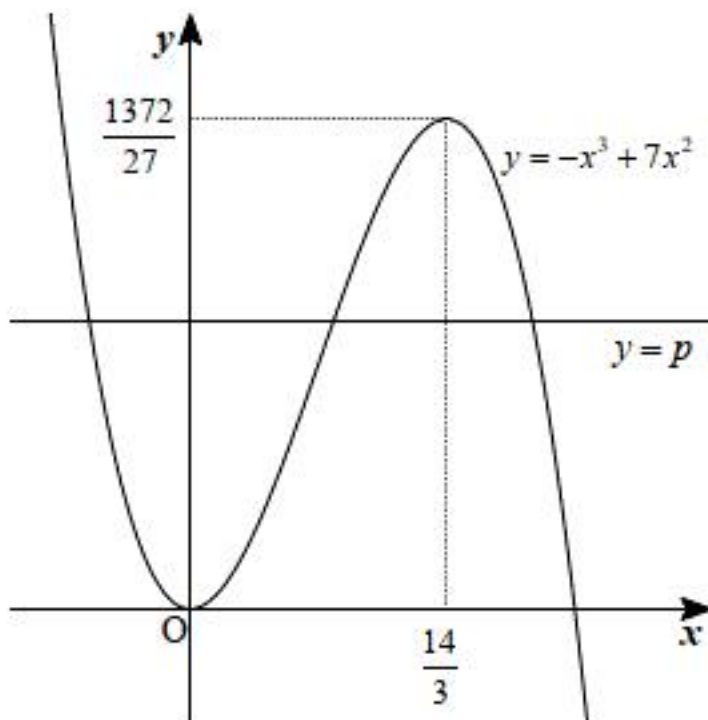
$f(x) = -x^3 + 7x^2$ とおくと、

$$f'(x) = -3x^2 + 14x = -3x \left(x - \frac{14}{3} \right)$$

より、 $y = f(x)$ の増減表は以下のとおりである。

x	...	0	...	$\frac{14}{3}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1372}{27}$	$\searrow$

よって $y = f(x)$ 、および直線 $y = p$ は下図のようになる。



以上より、 $y = f(x)$ と直線 $y = p$ が異なる3点で交わる時、 $0 < p < \frac{1372}{27}$ である。

(答) $0 < p < \frac{1372}{27}$

(4)

(2)の結果より、

$$g_4 = 1393$$

$$\Leftrightarrow 2401 - 28p = 1393$$

$$\therefore p = 36$$

であり、これは $0 < p < \frac{1372}{27}$ を満たす。これを①へ代入すると

$$x^3 - 7x^2 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-3)(x-6) = 0$$

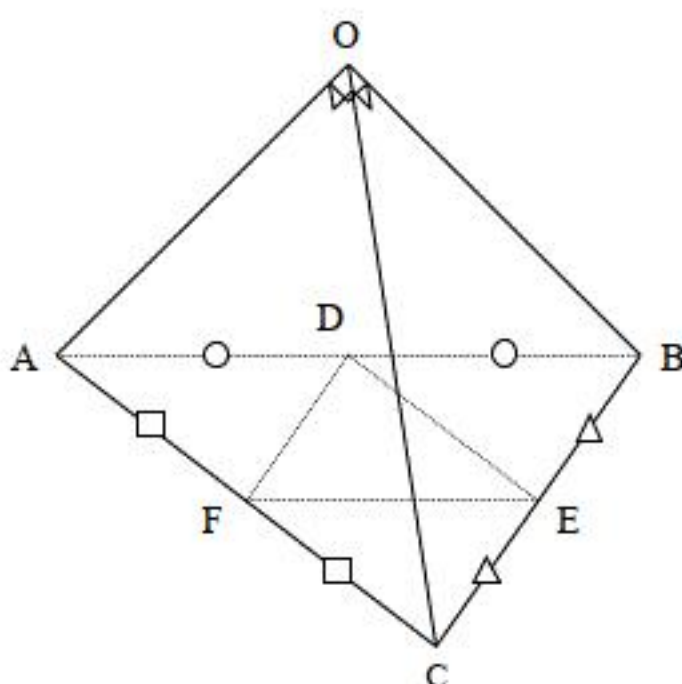
$$\therefore x = -2, 3, 6$$

を得る。よって $a < b < c$ より、 $a = -2, b = 3, c = 6, p = 36$ である。

(答) $a = -2, b = 3, c = 6, p = 36$

【Ⅲ】

以下に原点 O 、点 A, B, C, D, E, F を図示する。



題意より、

$$a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$|\overrightarrow{OC}| = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

である。

(1)

①より、

$$a(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) + b(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -(a+b+1)\overrightarrow{OP} + a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

である。 $a > 0, b > 0$ より $a+b+1 \neq 0$ であるから、 $\overrightarrow{OP} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{a+b+1}$ と分かる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{a+b+1}$$

(2)

3点 D, E, F はそれぞれ線分 AB, BC, CA の中点であるから、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}, \quad \overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}, \quad \overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}}{2}$$

となる。これより $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は、

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE}$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD}$$

となる。これを(1)の結果に代入すると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{a(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE}) + b(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF}) + (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD})}{a+b+1} \\ &= \frac{(a+b-1)\overrightarrow{OD} + (-a+b+1)\overrightarrow{OE} + (a-b+1)\overrightarrow{OF}}{a+b+1} \end{aligned}$$

を得る。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{(a+b-1)\overrightarrow{OD} + (-a+b+1)\overrightarrow{OE} + (a-b+1)\overrightarrow{OF}}{a+b+1}$$

(3)

点 P が線分 DF の中点であるとき、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF}}{2}$$

が成り立つ。 $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ は互いに平行でなく、零ベクトルでないから、これと(3)の結果を比較すると、

$$\begin{cases} \frac{a+b-1}{a+b+1} = \frac{1}{2} \\ \frac{-a+b+1}{a+b+1} = 0 \\ \frac{a-b+1}{a+b+1} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

となる。これを解いて $a=2, b=1$ を得る。

$$\text{(答)} \quad a=2, b=1$$

(4)

$\triangle DEF$ の面積を S とおくと、

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{DE}|^2 |\overrightarrow{DF}|^2 - (\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF})^2} \quad \dots \textcircled{4}$$

と表せる。また、直線 OP が3点 A, B, C を通る平面に垂直であることから、

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad \dots \textcircled{6}$$

が成り立つ。(3)の結果を(1)の結果に代入すると $\overrightarrow{OP} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{4}$ である。これを②、③

に注意して⑤、⑥に代入すると

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{4} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} (1 - 2|\overrightarrow{OA}|^2) = 0$$

$$\therefore |\overrightarrow{OA}|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{4} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} (1 - |\overrightarrow{OB}|^2) = 0$$

$$\therefore |\overrightarrow{OB}|^2 = 1$$

と分かる。したがって②、および(2)より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{DE}|^2 &= \frac{1}{4} |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}|^2 \\ &= \frac{1}{4} (|\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{DF}|^2 &= |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}|^2 \\ &= \frac{1}{4} (|\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (1 + 1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{4} |\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であるから、これらを④へ代入することで

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

を得る。

$$\text{(答)} \quad \frac{\sqrt{2}}{8}$$