

【Ⅰ】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
(1)	2	$\frac{32}{3}$	0	$\frac{155}{12}$	$\frac{16}{3}$	$0 < k < \frac{16}{3}, \frac{32}{3} < k$	6
(2)	ク	ケ	コ				
	5	6	11111100000				

【解説】

(1)

$x > 0$ の範囲において、

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 + 8x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \\ &= (x+1)(x-2)(x-4) \end{aligned}$$

となる。よって、 $f'(x) = 0$ となるのは、 $x = 2, 4$ の2個である。ここで、

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{4}(-x)^4 - \frac{5}{3}|-x|^3 + (-x)^2 + 8|-x| \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}|x|^3 + x^2 + 8|x| \\ &= f(x) \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ は偶関数である。よって、 $x \geq 0$ について考えれば良い。 $x \geq 0$ における増減表は以下のようになる。

x	0	...	2	...	4	...
$f'(x)$	✕	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗

$f(x)$ は偶関数より、 $-3 \leq x \leq 1$ における最大値・最小値は、 $0 \leq x \leq 3$ における最大値・最小値に一致する。ここで、

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 4 - \frac{40}{3} + 4 + 16 = \frac{32}{3}$$

$$f(3) = \frac{81}{4} - 45 + 9 + 24 = \frac{33}{4}$$

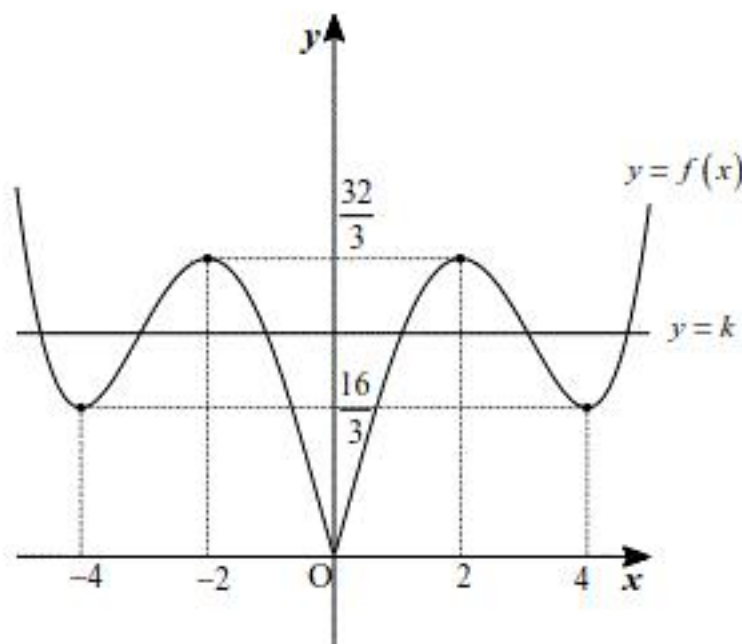
より、最大値は $\frac{32}{3}$ 、最小値は 0 となる。また、 $3 \leq x \leq 5$ において、

$$f(3) = \frac{33}{4}$$

$$f(4) = 64 - \frac{320}{3} + 16 + 32 = \frac{16}{3}$$

$$f(5) = \frac{625}{4} - \frac{625}{3} + 25 + 40 = \frac{155}{12}$$

より、 $f(x)$ の最大値は $\frac{155}{12}$ 、最小値は $\frac{16}{3}$ となる。



$f(x)$ は偶関数より、 $y = f(x)$ のグラフは上図のようになる。よって、 $y = k, y = f(x)$ の共有点が2個になるのは、

$$0 < k < f(4), f(2) < k$$

$$\Leftrightarrow 0 < k < \frac{16}{3}, \frac{32}{3} < k$$

のときである。また、共有点の個数が最大となるのは、

$$f(4) < k < f(2)$$

のときで、そのときの共有点の個数は6個であると分かる。

(2)

$$\begin{aligned} 2016 &= 2^5 \cdot 63 \\ &= 2^5 \cdot (2^6 - 1) \end{aligned}$$

であり、

$$2^{x+y} - 2^x = 2^x (2^y - 1)$$

となることから、 $2016 = 2^{x+y} - 2^x$ を満たすとき、 $x = 5, y = 6$ となる。これより、二進法であらわすと、 2^{11} は100000000000、 2^5 は100000であり、2016は

$$100000000000_{(2)} - 100000_{(2)} = 11111100000_{(2)}$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)

$$\begin{aligned}
 a_2 &= 2a_1 = 2 \\
 a_3 &= a_2 - 1 = 1 \\
 a_4 &= a_3 + 1 = 2 \\
 a_5 &= 2a_4 = 4 \\
 a_6 &= a_5 - 1 = 3
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \ a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 4, a_6 = 3$$

(2)

$$\begin{aligned}
 a_{3m+4} &= a_{3m+3} + 1 \\
 &= a_{3m+2} \\
 &= 2a_{3m+1}
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $a_{3m+4} = 2a_{3m+1}$ である。

$$(\text{答}) \ a_{3m+4} = 2a_{3m+1}$$

(3)

(2)の結果より、 $b_m = a_{3m+1}$ とおくと、数列 $\{b_m\}$ は初項 $b_0 = a_1 = 1$ 、公比 2 の等比数列である。したがって、

$$a_{3m+1} = b_m = 1 \cdot 2^m = 2^m$$

を得る。

$$(\text{答}) \ 2^m$$

(4)

$$\begin{aligned}
 a_{3m+2} &= 2a_{3m+1} = 2^{m+1} \\
 a_{3m+3} &= a_{3m+2} - 1 = 2^{m+1} - 1
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \ a_{3m+2} = 2^{m+1}, a_{3m+3} = 2^{m+1} - 1$$

(5)

 $n = 3m$ のとき、

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=1}^m (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) \\
 &= \sum_{k=1}^m (2^{k-1} + 2^k + 2^k - 1) \\
 &= 2^m - 1 + 2 \cdot (2^{m+1} - 2) - m \\
 &= 5 \cdot 2^m - m - 5
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \ 5 \cdot 2^m - m - 5$$

【Ⅲ】

(1)

直線 CD に点 B から下ろした足を H とすると、 H は直線 CD 上に存在するので、実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= (1-t)\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OD} \\ &= 2(1-t)\vec{a} + \frac{4}{3}t\vec{b}\end{aligned}$$

と表すことができる。また、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} &= \left\{ 2(1-t)\vec{a} + \left(\frac{4}{3}t - 1 \right) \vec{b} \right\} \cdot \left(-2\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b} \right) \\ &= -4(1-t)|\vec{a}|^2 + \left(\frac{14}{3} - \frac{16}{3}t \right) \vec{a} \cdot \vec{b} + \left(\frac{16}{9}t - \frac{4}{3} \right) |\vec{b}|^2 \\ &= -4(1-t) \cdot 4 + \left(\frac{14}{3} - \frac{16}{3}t \right) \cdot 3 + \left(\frac{16}{9}t - \frac{4}{3} \right) \cdot 9 \\ &= 16t - 14\end{aligned}$$

となるが、 $\overrightarrow{BH}$ と $\overrightarrow{CD}$ は垂直であるから、これが 0 に等しい。よって、

$$t = \frac{7}{8}$$

を得る。これより、

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{7}{6}\vec{b}$$

となり、 H は線分 BE の中点であるから、

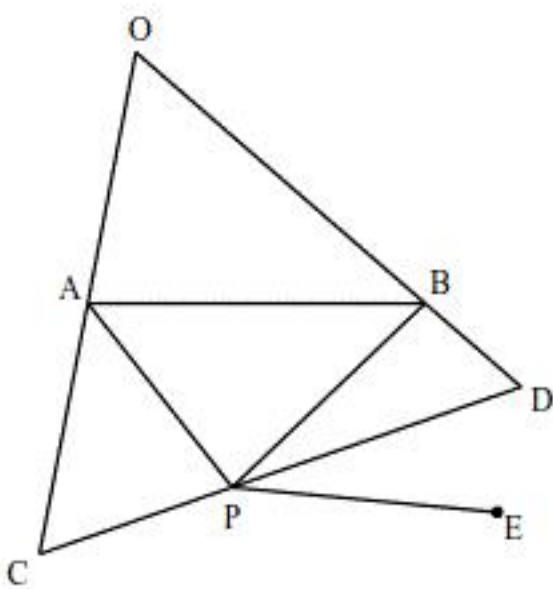
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

を得る。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$$

(2)

各点の位置関係は下図のようにになっている。



点 E は CD に関して、点 B と対称であるから、 $BP = EP$ である。よって、

$$L = AP + PE$$

となる。図より A, E は直線 CD に対して反対側にあるから、 $AP + PE$ が最小値をとるのは、 A, P, E が一直線上にあるときである。これより、 F は AE, CD の交点である。 F は AE, CD 上にあるので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= (1-k)\overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{OD} = 2(1-k)\vec{a} + \frac{4}{3}k\vec{b} \\ \overrightarrow{OF} &= (1-l)\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OE} = \left(1-l + \frac{l}{2} \right) \vec{a} + \frac{4}{3}l\vec{b} = \left(1 - \frac{l}{2} \right) \vec{a} + \frac{4}{3}l\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから、

$$\begin{cases} 2(1-k) = 1 - \frac{l}{2} \\ \frac{4}{3}k = \frac{4}{3}l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ l = \frac{2}{3} \end{cases}$$

となる。これより、 $\overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{8}{9}\vec{b}$ となる。また、そのときの L は、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AE}| &= \left| -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b} \right| \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{4}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{16}{9}|\vec{b}|^2} \\ &= \sqrt{1 - 4 + 16} \\ &= \sqrt{13}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{8}{9}\vec{b}, \text{ 最小値: } \sqrt{13}$$

(3)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AQ}|^2 + |\overrightarrow{BQ}|^2 &= R^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left\{ (|\overrightarrow{AQ}|^2 + 2\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BQ} + |\overrightarrow{BQ}|^2) + (|\overrightarrow{AQ}|^2 - 2\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BQ} + |\overrightarrow{BQ}|^2) \right\} &= R^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} (|\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BQ}|^2 + |\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{BQ}|^2) &= R^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} (|2\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2) &= R^2 \\ \Leftrightarrow 2 \left| \overrightarrow{OQ} - \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \right|^2 + \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 &= R^2 \\ \Leftrightarrow \left| \overrightarrow{OQ} - \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \right|^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{4}\end{aligned}$$

となる。 $\sqrt{2}R > AB$ であるから、 $\frac{R^2}{2} - \frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{4} > 0$ となり、点 Q は線分 AB の中点を中心とする円 S 上に存在することが示せた。また、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 2^2 - 2 \cdot 3 + 3^2 \\ &= 7\end{aligned}$$

であるから、円 S の半径は

$$\sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{4}} = \frac{\sqrt{2R^2 - 7}}{2}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{\sqrt{2R^2 - 7}}{2}$$

(4)

線分 AB の中点を点 I とする。(3)より、

$$M = AP^2 + BP^2 \Leftrightarrow IP^2 = \frac{M}{2} - \frac{7}{4} \Leftrightarrow M = 2IP^2 + \frac{7}{2}$$

が成り立つとわかる。よって、 IP が最小のときに M は最小となる。つまり、 G は I から直線 CD に下した垂線の足である。 G は直線 CD 上に存在するので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= (1-m)\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OD} \\ &= 2(1-m)\vec{a} + \frac{4}{3}m\vec{b}\end{aligned}$$

と表すことができる。また、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{CD} &= \left\{ \left(\frac{3}{2} - 2m \right) \vec{a} + \left(\frac{4}{3}m - \frac{1}{2} \right) \vec{b} \right\} \cdot \left(-2\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b} \right) \\ &= -(3-4m)|\vec{a}|^2 + \left(3 - \frac{16}{3}m \right) \vec{a} \cdot \vec{b} + \left(\frac{16}{9}m - \frac{2}{3} \right) |\vec{b}|^2 \\ &= -(3-4m) \cdot 4 + \left(3 - \frac{16}{3}m \right) \cdot 3 + \left(\frac{16}{9}m - \frac{2}{3} \right) \cdot 9 \\ &= 16m - 9\end{aligned}$$

となるが、 $\overrightarrow{IG}$ と $\overrightarrow{CD}$ は垂直であるから、これが 0 に等しい。よって、

$$m = \frac{9}{16}$$

を得る。これより、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{7}{8}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{IG}|^2 &= \left| \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \right|^2 \\ &= \frac{9}{64}|\vec{a}|^2 + \frac{3}{16}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{16}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{9}{64} \cdot 4 + \frac{3}{16} \cdot 3 + \frac{1}{16} \cdot 9 \\ &= \frac{27}{16}\end{aligned}$$

であるから、このときの M は

$$\begin{aligned}M &= 2|\overrightarrow{IG}|^2 + \frac{7}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{27}{16} + \frac{7}{2} \\ &= \frac{55}{8}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{7}{8}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}, \text{ 最小値: } \frac{55}{8}$$