

【1】

【解答】

ア	イ	ウ	エ
$a > 2$	$2 < a < 4$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7\sqrt{3}}{6}$
オ	カ	キ	
$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$(4+2k)x-k-2$	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	
ク	ケ	コ	
$k < -6, -6 < k < -2$	$x^3+x^2+(3k+5)x-2k-5$	$\frac{40\sqrt{5}}{3}$	

【解説】

(1)

最大辺は $a+1$ であり、三角形の二辺の長さの和は他の一辺の長さより大きいから、

$$a+1 < a-1+a \Leftrightarrow a > 2$$

となる。三角形が鈍角三角形となるとき、

$$\begin{aligned}(a+1)^2 &> (a-1)^2 + a^2 \\ \Leftrightarrow a(a-4) &< 0 \\ \Leftrightarrow 0 &< a < 4\end{aligned}$$

となる。 $a > 2$ とあわせて、

$$2 < a < 4$$

である。1つの内角が $\frac{2}{3}\pi$ となるとき、最大角が $\frac{2}{3}\pi$ となるから、その対辺は最大辺の $a+1$ である。

よって、余弦定理より、

$$\begin{aligned}a^2 + (a-1)^2 - 2a(a-1)\cos\frac{2}{3}\pi &= (a+1)^2 \\ \Leftrightarrow 2a^2 - 2a + 1 - 2(a^2 - a)\left(-\frac{1}{2}\right) &= a^2 + 2a + 1 \\ \Leftrightarrow a(2a-5) &= 0 \\ \Leftrightarrow a = \frac{5}{2} \quad (\because 2 < a < 4)\end{aligned}$$

となる。正弦定理より、外接円の半径を R とすると、

$$\begin{aligned}\frac{a+1}{\sin\frac{2}{3}\pi} &= 2R \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} &= 2R \\ \Leftrightarrow R &= \frac{7\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

となる。また、内接円の半径を r とおくと、三角形の面積を2通りに表すことで、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}r(a+a-1+a+1) &= \frac{1}{2}a(a-1)\sin\frac{2}{3}\pi \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}r \cdot 3a &= \frac{1}{2}a(a-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

となる。

(2)

$$f'(x) = 4x^3 + 2kx$$

より、接線 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned}y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= (4+2k)x - k - 2\end{aligned}$$

となる。この方程式を変形すると、

$$k(2x-1) + 4x - 2 - y = 0$$

となる。これが任意の k について成り立つ条件は、

$$\begin{cases} 2x-1=0 \\ 4x-2-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$$

である。ゆえに、接線 ℓ は常に点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を通る。さらに、曲線 C_1 と接線 ℓ の式を連立して y を

消去し、 $x=1$ で接することをもとに変形すると、

$$\begin{aligned}x^4 + kx^2 + 1 &= (4+2k)x - k - 2 \\ \Leftrightarrow x^4 + kx^2 - (4+2k)x + k + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 + 2x + k + 3) &= 0\end{aligned}$$

となる。曲線 C_1 と接線 ℓ の共有点の個数が3となる条件は、 $x^2 + 2x + k + 3 = 0$ が $x \neq 1$ である異なる2つの実数解をもつことである。判別式を D とおくと、

$$\frac{D}{4} = -k - 2$$

であり、条件は、

$$\begin{cases} 1+2+k+3 \neq 0 \\ \frac{D}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow k < -6, -6 < k < -2$$

である。この範囲のもとで、曲線 C_2 と接線 ℓ の交点の x 座標は、 $x=1$ 及び $x^2 + 2x + k + 3 = 0$ の解、すなわち $x=1, -1 \pm \sqrt{-k-2}$ である。いま、曲線 C_2 の方程式を $y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ とおくと、曲線 C_2 と接線 ℓ を連立して y を消去した式は、

$$x^3 + \alpha x^2 + (\beta - 4 - 2k)x + \gamma + k + 2 = 0$$

となる。この3次方程式の解が $x=1, -1 \pm \sqrt{-k-2}$ であるから、解と係数の関係より、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} -\alpha = 1 + (-1 + \sqrt{-k-2}) + (-1 - \sqrt{-k-2}) \\ \beta - 4 - 2k = 1 \cdot (-1 + \sqrt{-k-2}) + 1 \cdot (-1 - \sqrt{-k-2}) + (-1 - \sqrt{-k-2})(-1 + \sqrt{-k-2}) \\ -(\gamma + k + 2) = 1 \cdot (-1 - \sqrt{-k-2})(-1 + \sqrt{-k-2}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3k + 5 \\ \gamma = -2k - 5 \end{cases}\end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$C_2: y = x^3 + x^2 + (3k+5)x - 2k - 5$$

となる。 $k=-7$ のとき、3交点の x 座標は $x=1, -1 \pm \sqrt{5}$ となり、曲線 C_2 の式から接線 ℓ の式を引いた式 $g(x)$ は、

$$g(x) = (x+1+\sqrt{5})(x-1)(x+1-\sqrt{5}) = x^3 + x^2 - 6x + 4$$

となる。よって、求める面積は、

$$\begin{aligned}\left| \int_{-1-\sqrt{5}}^1 g(x) dx - \int_1^{-1+\sqrt{5}} \{-g(x)\} dx \right| &= \left| \int_{-1-\sqrt{5}}^1 g(x) dx + \int_1^{-1+\sqrt{5}} g(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{-1-\sqrt{5}}^{-1+\sqrt{5}} g(x) dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 4x \right]_{-1-\sqrt{5}}^{-1+\sqrt{5}} \right| \\ &= \left| \frac{40\sqrt{5}}{3} \right| \\ &= \frac{40\sqrt{5}}{3}\end{aligned}$$

となる。

【Ⅱ】

(1)

題意より、

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 - 3 \cdot 1 + \frac{1}{2^{1-1}} \\ &= -1 - 3 + 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 - 3 \cdot 2 + \frac{1}{2^{2-1}} \\ &= -3 - 6 + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{17}{2} \end{aligned}$$

となるから、

$$a_2 = -3, a_3 = -\frac{17}{2}, b_2 = -3, b_3 = -9$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_2 = -3, a_3 = -\frac{17}{2}, b_1 = -1, b_2 = -3, b_3 = -9$$

(2)

漸化式より、 $n \geq 2$ において、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= -1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(-3k + \frac{1}{2^{k-1}} \right) \\ &= -\frac{3}{2}n(n-1) + 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \end{aligned}$$

となる。 $n=1$ のとき、

$$-\frac{3}{2} \cdot 1 \cdot (1-1) + 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} = -1$$

となり、 a_1 の値と一致する。

$$(\text{答}) \quad a_n = -\frac{3}{2}n(n-1) + 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2}$$

(3)

a_n の項のうち、 $-\frac{3}{2}n(n-1)+1$ は、 $n(n-1)$ が連続2整数の積で偶数となることから、整数で

ある。また、 $n \geq 3$ において、

$$0 < \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} < 1$$

となることから、

$$b_n = -\frac{3}{2}n(n-1) + 1 - 1 = -\frac{3}{2}n(n-1)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} c_n &= a_n - b_n \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_n = -\frac{3}{2}n(n-1), c_n = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2}$$

(4)

(1)より、

$$c_1 = 0, c_2 = 0$$

となる。よって、 $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} d_n &= b_1c_1 + b_2c_2 + \sum_{k=3}^n b_kc_k \\ &= 0 + 0 + \sum_{k=3}^n \left\{ -\frac{3}{2}k(k-1) \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{k-2} \right\} \\ &= \sum_{k=3}^n \left\{ -\frac{3}{2}k(k-1) \right\} + \sum_{k=3}^n \frac{3}{2}k(k-1) \left(\frac{1}{2} \right)^{k-2} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} \sum_{k=3}^n k(k-1) &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \sum_{k=3}^n \{ (k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2) \} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \{ (k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2) \} \\ &= -\frac{1}{2} \{ (n+1)n(n-1) - 3 \cdot 2 \cdot 1 \} \\ &= -\frac{1}{2} (n+1)n(n-1) + 3 \end{aligned}$$

である。また、 $f(k) = (Ak^2 + Bk + C) \left(\frac{1}{2} \right)^k$ とし、

$$\frac{3}{2}k(k-1) \left(\frac{1}{2} \right)^{k-2} = f(k+1) - f(k)$$

とすると、

$$\begin{aligned} &\left\{ A(k+1)^2 + B(k+1) + C \right\} \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} - \left\{ Ak^2 + Bk + C \right\} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{3}{2}k(k-1) \left(\frac{1}{2} \right)^{k-2} \\ \Leftrightarrow &\left\{ A(k+1)^2 + B(k+1) + C \right\} \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} - \left\{ 2Ak^2 + 2Bk + 2C \right\} \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} = \frac{3}{2} \cdot 2^3 \cdot k(k-1) \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} \{ -Ak^2 + (2A-B)k + A+B-C \} = (12k^2 - 12k) \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} \end{aligned}$$

となり、これが k についての恒等式となるから、

$$\begin{cases} -A = 12 \\ 2A - B = -12 \\ A + B - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -12 \\ B = -12 \\ C = -24 \end{cases}$$

である。したがって、

$$f(k) = (-12k^2 - 12k - 24) \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \frac{3}{2}k(k-1) \left(\frac{1}{2} \right)^{k-2} &= \sum_{k=3}^n \{ f(k+1) - f(k) \} \\ &= f(n+1) - f(3) \\ &= \{ -12(n+1)^2 - 12(n+1) - 24 \} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - \{ -12 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 - 24 \} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \\ &= -3(n^2 + 3n + 4) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 21 \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=3}^n \left\{ -\frac{3}{2}k(k-1) \right\} + \sum_{k=3}^n \frac{3}{2}k(k-1) \left(\frac{1}{2} \right)^{k-2} \\ &= -\frac{1}{2}(n+1)n(n-1) + 3 - 3(n^2 + 3n + 4) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 21 \\ &= -\frac{1}{2}(n+1)n(n-1) - 3(n^2 + 3n + 4) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 24 \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

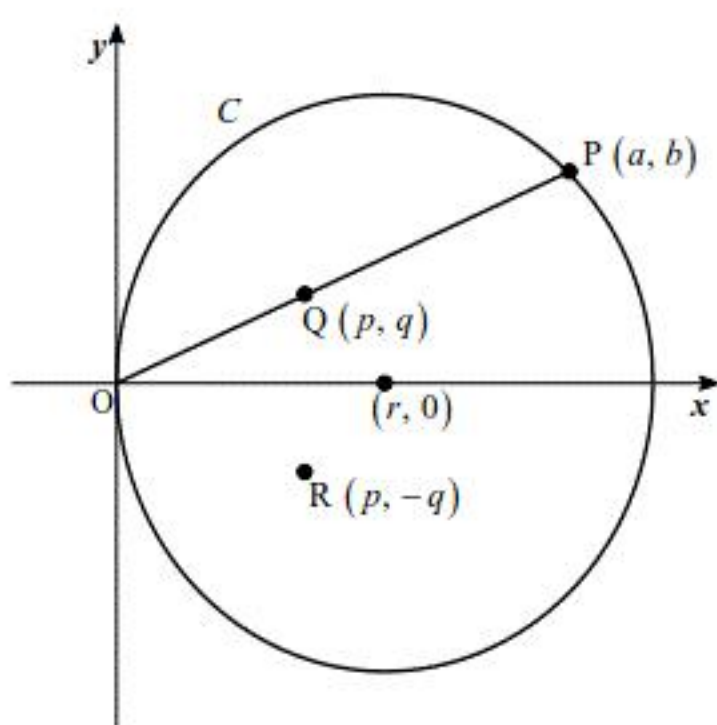
となる。ここで、 $n=1$ のとき $d_1=0$ であり、 $(*)$ に $n=1$ を代入すると実際に0となる。また、 $n=2$ のとき $d_2=0$ であり、 $(*)$ に $n=2$ を代入すると実際に0となる。したがって、 $n \geq 1$ で

$$d_n = -\frac{1}{2}(n+1)n(n-1) - 3(n^2 + 3n + 4) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 24 \text{ が成立する。}$$

$$(\text{答}) \quad d_n = -\frac{1}{2}(n+1)n(n-1) - 3(n^2 + 3n + 4) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 24$$

〔Ⅲ〕

(1)



O, P, Q は一直線上にあるから、実数 k を用いて、

$$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP}$$

とおける。さらに、

$$|\overrightarrow{OQ}| \cdot |\overrightarrow{OP}| = 1$$

であるから、

$$|\overrightarrow{OP}| \cdot k |\overrightarrow{OP}| = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{|\overrightarrow{OP}|^2}$$

となる。よって、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{|\overrightarrow{OP}|^2} \overrightarrow{OP} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{a}{a^2 + b^2}, q = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

(2)

R(x, y) とおく。このとき、題意より、

$$\begin{cases} x = p \\ y = -q \end{cases}$$

となる。また、 $p > 0$ より (1) の結果を用いて、 $b = \frac{q}{p} \cdot a$ となる。これと $p = \frac{a}{a^2 + b^2}$ から b を消

去して、

$$\begin{aligned} p &= \frac{a}{a^2 + \frac{q^2}{p^2} a^2} \\ &= \frac{1}{a + \frac{q^2}{p^2} a} \quad (\because a > 0) \\ &= \frac{p^2}{(p^2 + q^2)a} \end{aligned}$$

となり、

$$a = \frac{p}{p^2 + q^2}$$

を得る。これと $b = \frac{q}{p} \cdot a$ から、

$$b = \frac{q}{p^2 + q^2}$$

となる。いま、点 P が円 C 上を動くとき、

$$(a - r)^2 + b^2 = r^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{p^2 + q^2} - r \right)^2 + \left(\frac{q}{p^2 + q^2} \right)^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - r \right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right)^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow \left\{ x - r(x^2 + y^2) \right\}^2 + y^2 &= r^2 (x^2 + y^2)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2rx(x^2 + y^2) + r^2(x^2 + y^2)^2 + y^2 &= r^2 (x^2 + y^2)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= 2rx(x^2 + y^2) \\ \Leftrightarrow 2rx &= 1 \quad (\because x^2 + y^2 \neq 0) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2r} \quad (\because r \neq 0) \end{aligned}$$

となる。以上より、求める軌跡は直線 $x = \frac{1}{2r}$ である。

$$(\text{答}) \quad \text{直線 } x = \frac{1}{2r}$$

(3)

①より、

$$\begin{aligned} b^2 &= r^2 - (a - r)^2 \\ &= 2ra - a^2 \end{aligned}$$

となる。また、(1)より、

$$q = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

であるから、

$$\begin{aligned} d^2 &= (a - p)^2 + (b + q)^2 \\ &= \left(a - \frac{a}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(b + \frac{b}{a^2 + b^2} \right)^2 \\ &= \left(a - \frac{a}{a^2 + 2ra - a^2} \right)^2 + b^2 \left(1 + \frac{1}{a^2 + 2ra - a^2} \right)^2 \\ &= \left(a - \frac{1}{2r} \right)^2 + a(2r - a) \left(1 + \frac{1}{2ra} \right)^2 \\ &= 2a \left(r - \frac{1}{r} \right) + 2 + \frac{1}{2ra} \end{aligned}$$

であり、 $d > 0$ より、

$$d = \sqrt{2a \left(r - \frac{1}{r} \right) + 2 + \frac{1}{2ra}}$$

である。

$$(\text{答}) \quad d = \sqrt{2a \left(r - \frac{1}{r} \right) + 2 + \frac{1}{2ra}}$$

(4)

$2a \left(r - \frac{1}{r} \right) > 0$, $\frac{1}{2ra} > 0$ より、相加平均・相乗平均の関係を用いると、

$$\begin{aligned} d &\geq \sqrt{2 \sqrt{2a \left(r - \frac{1}{r} \right)} \cdot \frac{1}{2ra} + 2} \\ &= \sqrt{2 \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}} + 2} \end{aligned}$$

となる。等号成立は、

$$\begin{aligned} 2a \left(r - \frac{1}{r} \right) &= \frac{1}{2ra} \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{1}{4(r^2 - 1)} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{2\sqrt{r^2 - 1}} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

のときである。ここで、 $0 < a \leq 2r$ であるから、 $a = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - 1}}$ がこの範囲に含まれるかを考え

る。 $\frac{1}{2\sqrt{r^2 - 1}} > 0$ は明らかであり、 $\frac{1}{2\sqrt{r^2 - 1}} \leq 2r$ を示す。 $2r$, $\frac{1}{2\sqrt{r^2 - 1}}$ はともに正であるから、

$(2r)^2$ と $\left(\frac{1}{2\sqrt{r^2 - 1}} \right)^2$ の大小関係は $2r$ と $\frac{1}{2\sqrt{r^2 - 1}}$ の大小関係に等しい。 $(2r)^2$ と $\left(\frac{1}{2\sqrt{r^2 - 1}} \right)^2$ の大

小関係について、

$$\begin{aligned} (2r)^2 - \left(\frac{1}{2\sqrt{r^2 - 1}} \right)^2 &= 4r^2 - \frac{1}{4(r^2 - 1)} \\ &= \frac{16r^4 - 16r^2 - 1}{4(r^2 - 1)} \\ &= \frac{\{4r^2 - (2 + \sqrt{5})\} \{4r^2 - (2 - \sqrt{5})\}}{4(r^2 - 1)} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $r^2 > \frac{1}{4}(2 + \sqrt{5})$ であるから、 $(2r)^2 - \left(\frac{1}{2\sqrt{r^2 - 1}} \right)^2 > 0 \Leftrightarrow (2r)^2 > \left(\frac{1}{2\sqrt{r^2 - 1}} \right)^2$ とな

る。よって、 $\frac{1}{2\sqrt{r^2 - 1}} \leq 2r$ が示された。以上より、 $a = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - 1}}$ のとき d は最小値

$\sqrt{2\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}} + 2}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - 1}} \text{ のとき最小値 } \sqrt{2\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}} + 2}$$