

【Ⅰ】

【解答】

(1)

ア	イ
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{n-1}{n}$

ウ	エ
$2^m m!$	$(2m-1)(2m-3)(2m-5)\cdots 5\cdot 3$

オ	カ
1	$\frac{\pi}{2}$

(2)

キ	ク
112	50400

ケ	コ
7	-5

【解説】

(1)

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \text{ より,}$$
$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。また、部分積分法を用いて、 $n \geq 3$ のとき、

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (-\cos x)' dx \\ &= \left[-\cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx \\ &= (n-1) (I_{n-2} - I_n) \\ \therefore I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と表せる。また、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

である。 m を 3 以上の自然数とするととき、①、②、③より

$$\begin{aligned} I_{2m+1} &= \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 \\ &= \frac{(2m)(2m-2)(2m-4)\cdots 4 \cdot 2}{(2m+1)(2m-1)(2m-3)\cdots 5 \cdot 3} \\ &= \frac{2^m m!}{(2m+1)(2m-1)(2m-3)\cdots 5 \cdot 3} \\ I_{2m} &= \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} \cdots \frac{3}{4} I_2 \\ &= \frac{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\cdots 5 \cdot 3}{(2m)(2m-2)(2m-4)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\cdots 5 \cdot 3}{2^m m!} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。更に、 $0 < I_{2m+2} < I_{2m+1} < I_{2m}$ より

$$\begin{aligned} \frac{2m+1}{2m+2} I_{2m} &< I_{2m+1} < I_{2m} \\ \Leftrightarrow \frac{2m+1}{2m+2} &< \frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} < 1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m+1}{2m+2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{m}}{2 + \frac{2}{m}} = 1$$

となるから、④より、はさみうちの原理から $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} = 1$ が成立する。ゆえに、

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{(2m)^2 (2m-2)^2 (2m-4)^2 \cdots 2^2}{(2m+1)(2m-1)^2 (2m-3)^2 \cdots 3^2} \\ &= \frac{(2m)(2m-2)(2m-4)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)(2m-3)\cdots 3} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2m-1)(2m-3)(2m-5)\cdots 3}{(2m)(2m-2)(2m-4)\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

であるから、 $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \frac{\pi}{2}$ を得る。

(2)

$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, $2800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ より、 2016 と 2800 の最大公約数は $d = 2^4 \cdot 7 = 112$ 、最小公倍数は $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 50400$ である。よって、方程式 $2016x + 2800y = d$ は

$$\begin{aligned} 2016x + 2800y &= d \\ \Leftrightarrow 2016x + 2800y &= 112 \\ \Leftrightarrow 18x + 25y &= 1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$18 \cdot 7 + 25 \cdot (-5) = 1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

であるから、⑤、⑥を辺々引いて整理することで

$$18(7-x) = 25(y+25)$$

と表せる。 18 と 25 は互いに素であるから、整数解 x, y について、整数 k を用いて

$$\begin{cases} 7-x = 25k \\ y+5 = 18k \end{cases}$$

と置くことができる。よって、整数解は $(x, y) = (7-25k, 18k-5)$ である。これを $|x|+|y|$ に代入すると

$$|x|+|y| = |7-25k| + |18k-5|$$

となる。ここで、

[1] $k \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} |7-25k| + |18k-5| &= (25k-7) + (18k-5) \\ &= 43k-12 \end{aligned}$$

であるから、 $k = 1$ 、すなわち $(x, y) = (-18, 13)$ のとき最小値 31 をとる。

[2] $k \leq 0$ のとき

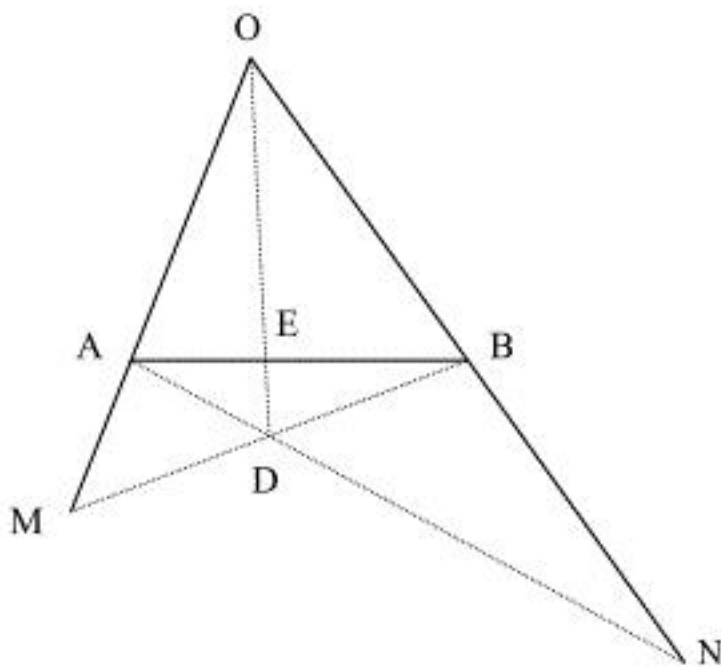
$$\begin{aligned} |7-25k| + |18k-5| &= (7-25k) + (5-18k) \\ &= 12-43k \end{aligned}$$

であるから、 $k = 0$ 、すなわち $(x, y) = (7, -5)$ のとき最小値 12 をとる。

以上[1], [2]より、 $k = 0$ 、すなわち $(x, y) = (7, -5)$ のとき最小値 12 をとる。

〔Ⅱ〕

以下に、△OABおよび点D, E, M, Nを図示する。



(1)

点Mは線分OAを3:1に外分し、点Nは線分OBを2:1に外分するため、

$$\overrightarrow{OM} = \frac{3}{2}\vec{a}, \overrightarrow{ON} = 2\vec{b}$$

である。また、点Pは線分ANを1-s:sに内分し、点Qは線分BMを1-t:tに内分するため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= s\overrightarrow{OA} + (1-s)\overrightarrow{ON} \\ &= s\vec{a} + 2(1-s)\vec{b} \\ \overrightarrow{OQ} &= t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OM} \\ &= \frac{3}{2}(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = s\vec{a} + 2(1-s)\vec{b}, \overrightarrow{OQ} = \frac{3}{2}(1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

(2)

(1)より、点DはAN上、BM上に存在するから、

$$\overrightarrow{OD} = s\vec{a} + 2(1-s)\vec{b} \quad \dots\dots ①$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{3}{2}(1-t)\vec{a} + t\vec{b} \quad \dots\dots ②$$

と表せる。ここで、 $\vec{a}, \vec{b}$ は互いに平行でなく、ゼロベクトルでないから、①、②の係数を比較して、

$$\begin{cases} s = \frac{3}{2}(1-t) \\ 2(1-s) = t \end{cases}$$

が成立する。これを解くと $(s, t) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \frac{3}{4}\vec{a} + 2\left(1 - \frac{3}{4}\right)\vec{b} \\ &= \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OD} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

(3)

3点O, E, Dは一直線上にあるため、実数kを用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= k\overrightarrow{OD} \\ &= \frac{3}{4}k\vec{a} + \frac{1}{2}k\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。ここで、点Eは直線AB上にあるため、係数の和は1に等しく、

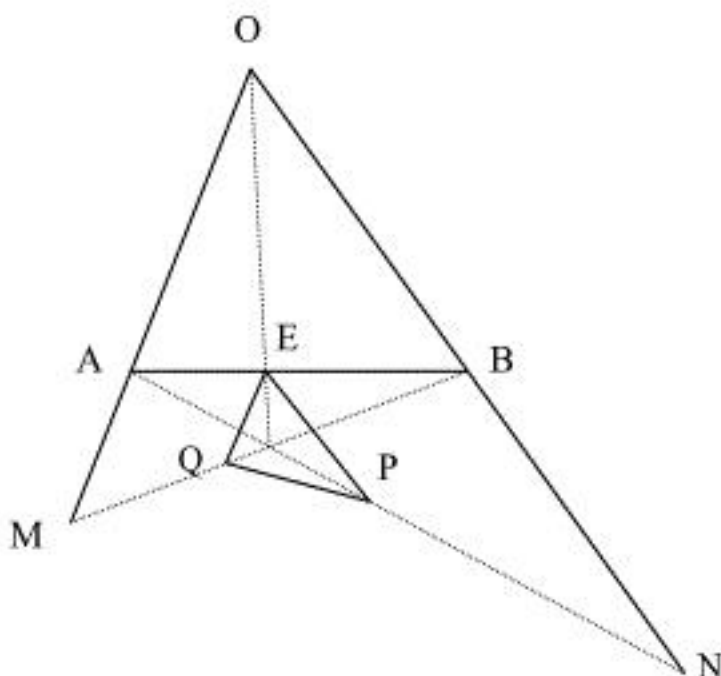
$$\begin{aligned}\frac{3}{4}k + \frac{1}{2}k &= 1 \\ \therefore k &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{OE} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$ が成り立つ。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OE} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

(4)

以下に△EPQを図示する。



上図より、

$$S = \frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB \quad \dots\dots ③$$

$$T = \frac{1}{2}EP \cdot EQ \cdot \sin \angle PEQ \quad \dots\dots ④$$

が成り立つ。ここで、OA//EQ, OB//EPより

$$\angle AOB = \angle PEQ \quad \dots\dots ⑤$$

である。また、△AEP ∽ △ABN, △BEQ ∽ △BAM, および(3)の結果より

$$\begin{aligned}EP : BN &= AE : AB \\ \Leftrightarrow EP : BN &= 2 : 5 \\ \Leftrightarrow EP &= \frac{2}{5}BN\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow EP = \frac{2}{5}OB \quad \dots\dots ⑥$$

$$\begin{aligned}EQ : AM &= BE : BA \\ \Leftrightarrow EQ : AM &= 3 : 5 \\ \Leftrightarrow EQ &= \frac{3}{5}AM\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow EQ = \frac{3}{10}OA \quad \dots\dots ⑦$$

が成立する。③～⑦より

$$\begin{aligned}\frac{T}{S} &= \frac{EP \cdot EQ}{OB \cdot OA} \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} \\ &= \frac{3}{25}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{25}$$

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \{(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i\}^2 \\ &= (\sqrt{3}-1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)i - (\sqrt{3}+1)^2 \\ &= -4\sqrt{3} + 4i\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \alpha^2 = -4\sqrt{3} + 4i$$

(2)

(1)の結果より,

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= -4\sqrt{3} + 4i \\ &= 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\end{aligned}$$

であり, $|\alpha|^2 = 8$, すなわち $|\alpha| = 2\sqrt{2}$ が成り立つ。また, α^2 の偏角は 2θ であり, $0 \leq 2\theta < 4\pi$ を満たすから,

$$2\theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi$$

となり, α の偏角 θ は $\frac{5}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi$ のいずれかをとることがわかる。ここで, α の実部と虚部はともに正であるから, $\theta = \frac{5}{12}\pi$ である。したがって,

$$\alpha = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad \alpha = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

(3)

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とおくと, (1)の結果より

$$\begin{aligned}z^3 &= \alpha \\ \Leftrightarrow r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)\end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{2} \\ 3\theta &= \frac{5}{12}\pi + 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2)\end{aligned}$$

が成立する。よって,

$$z = \begin{cases} \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{36}\pi + i\sin\frac{5}{36}\pi\right) \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{29}{36}\pi + i\sin\frac{29}{36}\pi\right) \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{53}{36}\pi + i\sin\frac{53}{36}\pi\right) \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad z = \begin{cases} \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{36}\pi + i\sin\frac{5}{36}\pi\right) \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{29}{36}\pi + i\sin\frac{29}{36}\pi\right) \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{53}{36}\pi + i\sin\frac{53}{36}\pi\right) \end{cases}$$

(4)

$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ と (2)の結果より,

$$\begin{aligned}w_n &= (1+i)\alpha^n \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot (2\sqrt{2})^n \left(\cos\frac{5n}{12}\pi + i\sin\frac{5n}{12}\pi\right) \\ &= (\sqrt{2})^{3n+1} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5n}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5n}{12}\pi\right) \right\}\end{aligned}$$

が成り立つ。よって, w_n が実数となる条件は, 自然数 k を用いて

$$\frac{\pi}{4} + \frac{5n}{12}\pi = k\pi$$

である。したがって,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} + \frac{5n}{12}\pi &= k\pi \\ \Leftrightarrow k &= \frac{5n+3}{12} \\ \Leftrightarrow n &= \frac{12k-3}{5}\end{aligned}$$

が自然数となる最小の k を求めればよい。 $k=1, 2, 3$ のとき, n はそれぞれ $\frac{9}{5}, \frac{21}{5}, \frac{33}{5}$ となり不適である。一方, $k=4$ のときは $n=9$ であるから, 求める最小の自然数は $n=9$ である。

$$(\text{答}) \quad n=9$$

〔Ⅳ〕

(1)

$0 < a \leq 1$ に注意すると,

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x} = \left[\log|1+x| \right]_0^a = \log(1+a)$$

である。

(答) $\log(1+a)$

(2)

与式より

$$\begin{aligned} \int_0^a f_n(x) dx &= \int_0^a dx + \int_0^a \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^k dx \\ &= a + \sum_{k=1}^{2n} \left\{ (-1)^k \int_0^a x^k dx \right\} \\ &= a + \sum_{k=1}^{2n} \left\{ (-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^a \right\} \\ &= a + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k a^{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{a}{1} + \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k} \end{aligned}$$

となるから, 題意は示された。

(証明終)

(3)

$f_n(x)$ は

$$\begin{aligned} f_n(x) &= x^0 - x^1 + x^2 - x^3 + \cdots + x^{2n} \\ &= \frac{1 - (-x)^{2n+1}}{1 - (-x)} \\ &= \frac{1 + x^{2n+1}}{1+x} \end{aligned}$$

と変形できるため,

$$f_n(x) - \frac{1}{1+x} = \frac{x^{2n+1}}{1+x}$$

が成立する。ここで, 積分区間が $0 \leq x \leq a$ であるから, $0 \leq x \leq a \leq 1$ であり,

$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x^{2n+1}}{1+x} \leq x^{2n+1}$$

である。等号は常には成立しないから, 各辺を区間 $0 \leq x \leq a$ で積分すると,

$$\begin{aligned} 0 &< \int_0^a \frac{x^{2n+1}}{1+x} dx < \int_0^a x^{2n+1} dx \\ \Leftrightarrow 0 &< \int_0^a \frac{x^{2n+1}}{1+x} dx < \frac{a^{2n+2}}{2n+2} \end{aligned}$$

となる。 $0 < a \leq 1$ より $\frac{a^{2n+2}}{2n+2} \leq \frac{1}{2n+2}$ であるから,

$$\begin{aligned} 0 &< \int_0^a \frac{x^{2n+1}}{1+x} dx < \frac{1}{2n+2} \\ \Leftrightarrow 0 &< \int_0^a \left(f_n(x) - \frac{1}{1+x} \right) dx < \frac{1}{2n+2} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(4)

(3)の結果より $0 < \int_0^a \left(f_n(x) - \frac{1}{1+x} \right) dx < \frac{1}{2n+2}$ が成り立つから, (1), (2)の結果を用いると,

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{dx}{1+x} &< \int_0^a f_n(x) dx < \frac{1}{2n+2} + \int_0^a \frac{dx}{1+x} \\ \Leftrightarrow \log(1+a) &< \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k} < \frac{1}{2n+2} + \log(1+a) \end{aligned}$$

を得る。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2n+2} + \log(1+a) \right\} = \log(1+a)$ であるから, はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k} = \log(1+a)$$

となる。また,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k} - \frac{a^{2n+1}}{2n+1} \right\}$$

であり, $0 < a \leq 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n+1}}{2n+1} = 0$ となることから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k} = \log(1+a)$$

と分かる。以上より,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k} = \log(1+a)$$

である。

(答) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k} = \log(1+a)$