

【1】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
(1)	$\frac{33}{100}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{33}{100}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{2}$
	キ	ク	ケ	コ		
(2)	$2e^2+1$	$e+\frac{1}{2e}$	$e+\frac{1}{4e}-1$	$\left(\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{12e^2}+\frac{3}{4}\right)\pi$		

【解説】

(1)

1から100までの整数のうち、3の倍数は33個ある。よって、取り出したカードの番号が3の倍数である確率は $\frac{33}{100}$ である。

また、1から100までの整数のうち、6の倍数は16個であるから、番号が6の倍数である確率は、 $\frac{16}{100}=\frac{4}{25}$ である。

144を素因数分解すると、

$$144=2^4\cdot3^2$$

であるから、144と互いに素であることは、偶数でも3の倍数でもないことと同値である。よって、144と互いに素であるカードの枚数は、100から偶数のカードの枚数と3の倍数のカードの枚数を引いて、6のカードの枚数を足したもの、すなわち

$$100-50-33+16=33\text{ [枚]}$$

となる。したがって、番号が144と互いに素である確率は $\frac{33}{100}$ である。

さらに、144の正の約数は、

$$(1+4)\cdot(1+2)=15\text{ [個]}$$

存在し、100以下のものは144以外の14個あるから、番号が144の約数である確率は

$$\frac{14}{100}=\frac{7}{50}\text{ である。}$$

また、100以下の自然数で144との最大公約数が6であるものは、144と互いに素な整数 a を用いて $6a$ とかけられるものであり、6, 30, 42, 66, 78の5個である。よって、番号と144との最大公約数が6である確率は $\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$ である。

最後に、144の約数で6の倍数であるものは、6, 12, 18, 24, 36, 48, 72の7個であるから、これらを番号とするカードを引く確率は $\frac{7}{100}$ である。番号が144の約数である確率は $\frac{7}{50}$ であるから、144の約数であることが分かっているとき、6の倍数である確率は

$$\frac{\frac{7}{100}}{\frac{7}{50}}=\frac{1}{2}$$

である。

(2)

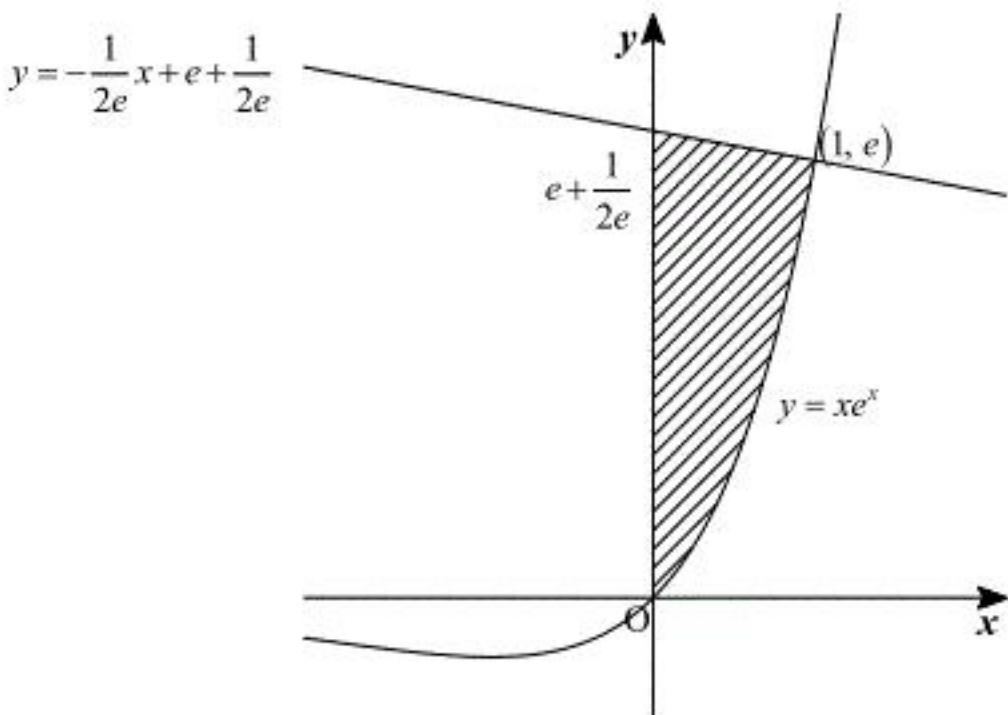
$f(x)=xe^x$ のとき、 $f'(x)=(x+1)e^x$ である。これより、 $(1, e)$ における法線の方程式は、

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{f'(1)}(x-1)+f(1) \\ &= -\frac{1}{2e}x+e+\frac{1}{2e}\end{aligned}$$

である。 x 軸との交点は、

$$0=-\frac{1}{2e}x+e+\frac{1}{2e}\Leftrightarrow x=2e^2+1$$

となり、 $(2e^2+1, 0)$ である。また、 y 軸との交点は、 $\left(0, e+\frac{1}{2e}\right)$ である。



D は上図の斜線部のようになるから、 D の面積は、

$$\begin{aligned}\int_0^1\left\{-\frac{1}{2e}(x-1)+e-xe^x\right\}dx &= \left[-\frac{1}{4e}(x-1)^2+ex-(x-1)e^x\right]_0^1 \\ &= e+\frac{1}{4e}-1\end{aligned}$$

となる。 D を x 軸の周りに回転させた時の回転体の体積は、

$$\begin{aligned}\pi\int_0^1\left\{-\frac{1}{2e}(x-1)+e\right\}^2dx - \pi\int_0^1(xe^x)^2dx &= \pi\left[-\frac{2e}{3}\left\{-\frac{1}{2e}(x-1)+e\right\}^3 - \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)e^{2x}\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{12e^2}+\frac{3}{4}\right)\pi\end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)

$(3+9i)\alpha - (8+4i)\beta + (5-5i)\gamma = 0$ を式変形して,

$$(3+9i)\alpha - (8+4i)\beta + (5-5i)\gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow (3+9i)(\alpha - \gamma) = (8+4i)(\beta - \gamma)$$

$$\therefore \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} = \frac{3+9i}{8+4i} = \frac{3(1+3i)}{4(2+i)} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}i$$

となる。

(答) 実部: $\frac{3}{4}$, 虚部: $\frac{3}{4}$

(2)

(1)より,

$$\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

となるから,

$$\angle ACB = \arg \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{BC}{AC} = \left| \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \right| = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

となる。

(答) $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$, $\frac{BC}{AC} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

(3)

(2)より, t を正の実数として, $AC = 4t$, $BC = 3\sqrt{2}t$ と表せる。このとき, $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$ を利用し

て, 余弦定理を用いると,

$$AB^2 = (4t)^2 + (3\sqrt{2}t)^2 - 2 \cdot 4t \cdot 3\sqrt{2}t \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 10t^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{10}t$$

となる。したがって,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{10}t}{4t} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

を得る。

(答) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

〔Ⅲ〕

(1)

ℓ, m を連立すると,

$$\begin{aligned}x+t &= -x + \sqrt{t^2+4} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\sqrt{t^2+4}-t}{2}\end{aligned}$$

となる。これより、交点は $\left(\frac{\sqrt{t^2+4}-t}{2}, \frac{\sqrt{t^2+4}+t}{2}\right)$ となる。また、 ℓ と x 軸の交点は、 $(-t, 0)$ となる。

$$(\text{答}) \quad P\left(\frac{\sqrt{t^2+4}-t}{2}, \frac{\sqrt{t^2+4}+t}{2}\right), \quad Q(-t, 0)$$

(2)

(x, y) が求める軌跡上にある

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{t^2+4}-t}{2} \\ y = \frac{\sqrt{t^2+4}+t}{2} \end{cases} \text{ となる実数 } t \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \sqrt{t^2+4} \\ y-x = t \end{cases} \text{ となる実数 } t \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow x+y = \sqrt{(y-x)^2+4}$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = (y-x)^2 + 4 \quad \text{かつ} \quad x+y \geq 0$$

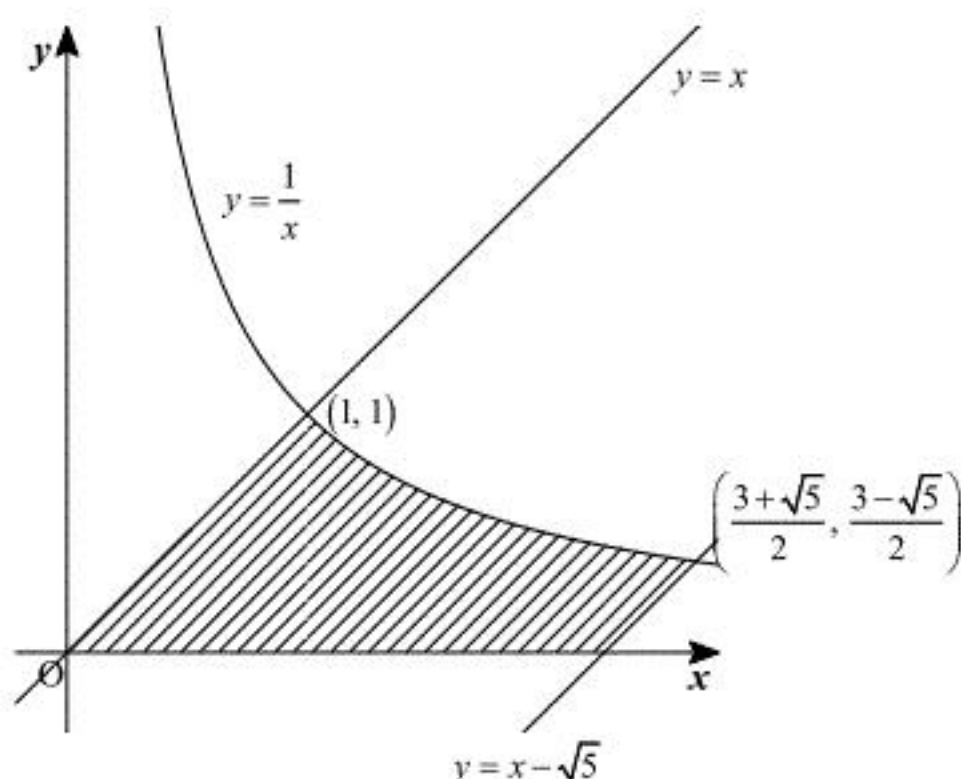
$$\Leftrightarrow xy = 1 \quad \text{かつ} \quad x+y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{x} \quad \text{かつ} \quad x > 0$$

となるから、求める軌跡は、 $y = \frac{1}{x}$ かつ $x > 0$ となる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{x} \quad \text{かつ} \quad x > 0$$

(3)



(2)より、線分PQは、直線 ℓ を曲線 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ と x 軸によって切り取ったものである。よって、 t が $-\sqrt{5} \leq t \leq 0$ の範囲で動くときに、線分PQが通過する範囲は上図の斜線部になる。

ここで、直線 $y = x$ と曲線 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ の交点は、 $t = 0$ のときのPの座標

$$\left(\frac{\sqrt{4+0}-0}{2}, \frac{\sqrt{4+0}+0}{2}\right) = (1, 1)$$

であり、直線 $y = x - \sqrt{5}$ と曲線 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ の交点は、 $t = -\sqrt{5}$ のときのPの座標

$$\left(\frac{\sqrt{4+5}+\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{4+5}-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

である。以上より、求める面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot 1^2 + \int_1^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2} + [\log x]_1^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} - \frac{7-3\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{5}-5}{4} + \log \frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{5}-5}{4} + \log \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

〔Ⅳ〕

(1)

$$\begin{aligned} F_{n+1}(\theta) - F_{n-1}(\theta) &= \frac{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{2\cos n\theta \sin\theta}{\sin\theta} \\ &= 2\cos n\theta \end{aligned}$$

となる。

(答) $2\cos n\theta$

(2)

(1)より、数列 $\{F_{2m}(\theta)\}$ の階差数列は $2\cos(2m+1)\theta$ である。よって、 $m \geq 2$ のとき、

$$F_{2m}(\theta) = F_2(\theta) + \sum_{k=1}^{m-1} 2\cos(2k+1)\theta$$

である。また、

$$F_2(\theta) = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = \frac{2\sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} = 2\cos \theta$$

であるから、

$$F_{2m}(\theta) = \sum_{k=0}^{m-1} 2\cos(2k+1)\theta$$

となる。これは $m=1$ でも成り立つ。以上より、 n が偶数のとき、

$$F_n(\theta) = 2\cos \theta + 2\cos 3\theta + 2\cos 5\theta + \cdots + 2\cos(n-3)\theta + 2\cos(n-1)\theta$$

が成り立つ。

(答) $F_n(\theta) = 2\cos \theta + 2\cos 3\theta + 2\cos 5\theta + \cdots + 2\cos(n-3)\theta + 2\cos(n-1)\theta$

(3)

数学的帰納法により、 $F_{2^m}(\theta) = 2^m \cos \theta \cos 2\theta \cos 2^2\theta \cdots \cos 2^{m-1}\theta$ を示す。

[1] $m=1$ のとき

$$F_2(\theta) = 2\cos \theta$$

であるから、 $m=1$ において、確かに題意を満たす。

[2] $m=k$ で題意を満たすと仮定する。

すると、

$$\begin{aligned} F_{2^{k+1}}(\theta) &= \frac{\sin 2^{k+1}\theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{2\sin 2^k\theta \cos 2^k\theta}{\sin \theta} \\ &= 2\cos 2^k\theta F_{2^k}(\theta) \\ &= 2^{k+1} \cos \theta \cos 2\theta \cos 2^2\theta \cdots \cos 2^k\theta \end{aligned}$$

となり、 $m=k+1$ でも成り立つ。

以上、[1], [2]より数学的帰納法から示せた。

(証明終)

(4)

$k=\ell$ の場合と $k \neq \ell$ の場合に場合分けして考える。

[1] $k \neq \ell$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos kx \cos \ell x dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \{\cos(k+\ell)x + \cos(k-\ell)x\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k+\ell} \sin(k+\ell)x + \frac{1}{k-\ell} \sin(k-\ell)x \right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

[2] $k=\ell$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^2 kx dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2kx) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2k} \sin 2kx \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、

$$\int_0^\pi \cos kx \cos \ell x dx = \begin{cases} 0 & k \neq \ell \text{ のとき} \\ \frac{\pi}{2} & k = \ell \text{ のとき} \end{cases}$$

を得る。

(答) $\begin{cases} 0 & k \neq \ell \text{ のとき} \\ \frac{\pi}{2} & k = \ell \text{ のとき} \end{cases}$

(5)

(3)より、

$$(\cos x \cos 2x \cos 2^2x \cdots \cos 2^{m-1}x)^2 = \left\{ \frac{F_{2^m}(x)}{2^m} \right\}^2$$

となる。さらに(2)を用いて、

$$(\cos x \cos 2x \cos 2^2x \cdots \cos 2^{m-1}x)^2 = \frac{1}{2^{2m}} \cdot 2^2 \left\{ \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos(2^m-1)x \right\}^2$$

である。(4)より、右辺を展開したときの $\cos kx \cos \ell x$ ($k \neq \ell$)の項は、0から π まで積分すると0となることに注意すると、

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi (\cos x \cos 2x \cos 2^2x \cdots \cos 2^{m-1}x)^2 dx \\ &= \frac{4}{2^{2m}} \int_0^\pi \left\{ \cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2^m-1)x \right\}^2 dx \\ &= \frac{4}{2^{2m}} \int_0^\pi \left\{ \cos^2 x + \cos^2 3x + \cdots + \cos^2(2^m-1)x \right\} dx \\ &= \frac{4}{2^{2m}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2^m}{2} \\ &= \frac{\pi}{2^m} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{2^m}$