

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ
	$2t+1$	$4t^2+2t-1$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
(2)	オ	カ	キ	
	120	6	78	
(3)	ク	ケ	コ	
	2	-16	$\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$	

【解説】

(1)

$t = \cos 2\theta$ より

$$\begin{aligned}t &= \cos 2\theta \\&= 1 - 2\sin^2 \theta \\&= 2\cos^2 \theta - 1\end{aligned}$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1-t), \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1+t)$$

となる。これより

$$\begin{aligned}\frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} &= \frac{3\sin \theta - 4\sin^3 \theta}{\sin \theta} \\&= 3 - 4\sin^2 \theta \\&= 3 - 4 \cdot \frac{1}{2}(1-t) \\&= 2t + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin 5\theta}{\sin \theta} &= \frac{\sin(2\theta + 3\theta)}{\sin \theta} \\&= \frac{\sin 2\theta \cos 3\theta + \cos 2\theta \sin 3\theta}{\sin \theta} \\&= \frac{2\sin \theta \cos \theta (4\cos^3 \theta - 3\cos \theta)}{\sin \theta} + \cos 2\theta \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} \\&= 2\cos^2 \theta (4\cos^2 \theta - 3) + \cos 2\theta \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} \\&= 2 \cdot \frac{1}{2}(1+t) \left\{ 4 \cdot \frac{1}{2}(1+t) - 3 \right\} + t(2t+1) \\&= 4t^2 + 2t - 1\end{aligned}$$

が得られる。次に、 $0 < 5\theta < 5\pi$ のとき $\sin 5\theta = 0$ のとき

$$\begin{aligned}5\theta &= \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\end{aligned}$$

となるので、このうち最小のものの値は $\theta = \frac{\pi}{5}$ である。 $\theta = \frac{\pi}{5}$ のとき $\sin 5\theta = 0$ であるから

$\frac{\sin 5\theta}{\sin \theta} = 0$ となる。これより

$$\begin{aligned}\frac{\sin 5\theta}{\sin \theta} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4t^2 + 2t - 1 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

が得られる。また、このとき $t = \cos \frac{2\pi}{5}$ であるが、 $\cos \frac{2\pi}{5} > 0$ より

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

がわかる。

(2)

5枚のカードを左から右へ順に並べたとき、これは順列になるので

$$5! = 120 \text{ (通り)}$$

ある。 $a_1 < a_2 < a_3$ かつ $a_3 > a_4 > a_5$ のとき a_3 が最大の5であることがわかる。さらに、 a_1, a_2 が決まれば a_3, a_4 は一通りに定まるので $a_1 < a_2$ を満たすものを探せばよい。従って

$$(a_1, a_2) = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$$

より、6通りある。 $a_1 \neq 1$ かつ $a_2 \neq 2$ となる並べ方を求めるときにこの余事象を考える。 $a_1 = 1$ となる並べ方は

$$4! = 24 \text{ (通り)}$$

あり、 $a_2 = 2$ となる並べ方も同様に24通りある。 $a_1 = 1$ かつ $a_2 = 2$ となる並べ方は

$$3! = 6 \text{ (通り)}$$

あるので、 $a_1 = 1$ または $a_2 = 2$ となる並べ方は

$$24 + 24 - 6 = 42 \text{ (通り)}$$

ある。以上より $a_1 \neq 1$ かつ $a_2 \neq 2$ となる並べ方は

$$120 - 42 = 78 \text{ (通り)}$$

である。

(3)

与えられた関数を x で微分すると

$$\begin{aligned}y' &= 12x^3 - 24x^2 \\&= 12x^2(x-2)\end{aligned}$$

となるので、増減表は以下のようになる。

x	...	0	...	2	...
y'	-	0	-	0	+
y	$\searrow$	0	$\searrow$	-16	$\nearrow$

これより、4次関数は $x=2$ のとき最小値 -16 をとる。ここで、実数 t を用いて曲線上の点の座標を $(t, 3t^4 - 8t^3)$ とすると、この座標での接線の方程式は

$$\begin{aligned}y &= (12t^3 - 24t^2)(x-t) + 3t^4 - 8t^3 \\&= (12t^3 - 24t^2)x - 9t^4 + 16t^3\end{aligned}$$

となる。この直線と曲線の交点の x 座標は

$$\begin{aligned}3x^4 - 8x^3 &= (12t^3 - 24t^2)x - 9t^4 + 16t^3 \\ \Leftrightarrow (x-t) \{ 3x^3 + (3t-8)x^2 + (3t^2-8t)x - (9t^3-16t^2) \} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-t)^2 \{ 3x^2 + (6t-8)x + (9t^2-16t) \} &= 0\end{aligned}$$

を満たす。ここで、曲線が直線と2点で接するとき、2次方程式

$$3x^2 + (6t-8)x + (9t^2-16t) = 0$$

は重解を持つので、判別式を D とすると

$$\begin{aligned}D &= 0 \\ \Leftrightarrow (3t-4)^2 - 3t(9t-16) &= 0 \\ \Leftrightarrow 9t^2 - 12t - 8 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

が得られる。従って、2つの接点のうち x 座標が大きいほうの x 座標の値は $\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$ である。

〔Ⅱ〕

(1)

$OA = x, OB = y$ であるから、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ と平行で向きが同じである単位ベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ を用いて

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = x\vec{u} \\ \overrightarrow{OB} = y\vec{v} \end{cases}$$

とかける。ここで、点Pは $\angle OAB$ の二等分線と線分 OB との交点であるから、線分 OB を $OA:AB = x:1$ に内分する点である。よって、 $\overrightarrow{OP}$ は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{x}{x+1} \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{xy}{x+1} \vec{v} \end{aligned}$$

と表せる。

(答) $\overrightarrow{OP} = \frac{xy}{x+1} \vec{v}$

(2)

まず、 $\overrightarrow{OQ}$ を求める。点Qは $\angle OBA$ の二等分線と線分 OA との交点であるから、線分 OA を $OB:AB = y:1$ に内分する点である。よって、 $\overrightarrow{OQ}$ は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \frac{y}{y+1} \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{xy}{y+1} \vec{u} \end{aligned}$$

と表せる。ここで、点Rは直線APと直線BQの交点である。よって点Rは線分AP上にあるため、線分APを $p:1-p$ に内分するとすれば、 $\overrightarrow{OR}$ は

$$\overrightarrow{OR} = p\overrightarrow{OP} + (1-p)\overrightarrow{OA}$$
$$\therefore \overrightarrow{OR} = x(1-p)\vec{u} + \frac{xy}{x+1} \vec{v} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。また、点Rは線分BQ上にもあるため、線分BQを $q:1-q$ に内分するとすれば、 $\overrightarrow{OR}$ は

$$\overrightarrow{OR} = q\overrightarrow{OQ} + (1-q)\overrightarrow{OB}$$
$$\therefore \overrightarrow{OR} = \frac{xy}{y+1} \vec{u} + y(1-q)\vec{v} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と表せる。ここで、単位ベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ はそれぞれ1次独立であるから、①、②より係数を比較すると、

$$\begin{cases} x(1-p) = \frac{xy}{y+1} \\ \frac{xy}{x+1} = y(1-q) \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと p, q はそれぞれ

$$\begin{cases} p = \frac{x+1}{x+y+1} \\ q = \frac{y+1}{x+y+1} \end{cases}$$

となる。よって、 $p = \frac{x+1}{x+y+1}$ を①に代入すると、 $\overrightarrow{OR}$ は $x, y, \vec{u}, \vec{v}$ を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= x\left(1 - \frac{x+1}{x+y+1}\right)\vec{u} + \frac{xy}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x+y+1} \vec{v} \\ &= \frac{xy}{x+y+1} \vec{u} + \frac{xy}{x+y+1} \vec{v} \\ &= \frac{xy}{x+y+1} (\vec{u} + \vec{v}) \end{aligned}$$

と表せる。

(答) $\overrightarrow{OR} = \frac{xy}{x+y+1} (\vec{u} + \vec{v})$

(3)

直線ORと直線ABが垂直であるとき、 $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ が成り立つ。ここで、 $x > 0, y > 0$ であり、 $\vec{u}, \vec{v}$ は単位ベクトルより $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$ である。また、 $0^\circ < \angle AOB < 180^\circ$ であり、

$-1 < \cos \angle AOB < 1$ が成り立つため、 $\vec{u}, \vec{v}$ の内積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ は

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \angle AOB \\ &= \cos \angle AOB \\ \therefore -1 < \vec{u} \cdot \vec{v} < 1 \end{aligned}$$

となる。これらより、 $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ を変形すると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OR} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{xy}{x+y+1} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (y\vec{v} - x\vec{u}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x|\vec{u}|^2 + y|\vec{v}|^2 + (y-x)\vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \quad (\because x > 0, y > 0) \\ \Leftrightarrow (y-x)(1 + \vec{u} \cdot \vec{v}) &= 0 \quad (|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1) \\ \therefore y &= x \quad (\because -1 < \vec{u} \cdot \vec{v} < 1) \end{aligned}$$

となる。このとき、 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PQ}$ は $x, \vec{u}, \vec{v}$ を用いてそれぞれ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= y\vec{v} - x\vec{u} \\ &= -x(\vec{u} - \vec{v}) \\ \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{xy}{y+1} \vec{u} - \frac{xy}{x+1} \vec{v} \\ &= \frac{x^2}{x+1} (\vec{u} - \vec{v}) \end{aligned}$$

と表される。よって $\overrightarrow{PQ} = -\frac{x}{x+1} \overrightarrow{AB}$ とかけると、直線ORと直線ABが垂直であるとき、直線ABと直線PQが平行となることがわかる。

(証明終)

(4)

$2\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ のとき $\overrightarrow{OR}$ の大きさ $|\overrightarrow{OR}|$ は

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OR}| &= \sqrt{\left(\frac{xy}{x+y+1} (\vec{u} + \vec{v})\right)^2} \\ &= \left(\frac{xy}{x+y+1}\right) \sqrt{(|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2)} \quad (\because x > 0, y > 0) \\ &= \left(\frac{xy}{x+y+1}\right) \sqrt{(1-1+1)} \quad (\because 2\vec{u} \cdot \vec{v} = -1) \\ &= \frac{xy}{x+y+1} \end{aligned}$$

と表せる。ここで、

$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=t \end{cases}$$

とおき、 s, t のとり得る範囲を考える。このとき、 X に関する2次方程式 $X^2 - sX + t = 0$ は2実数解 x, y を持つから、判別式を D とおくと

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow s^2 - 4t &\geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。また、2実数解 x, y はともに正であるから、

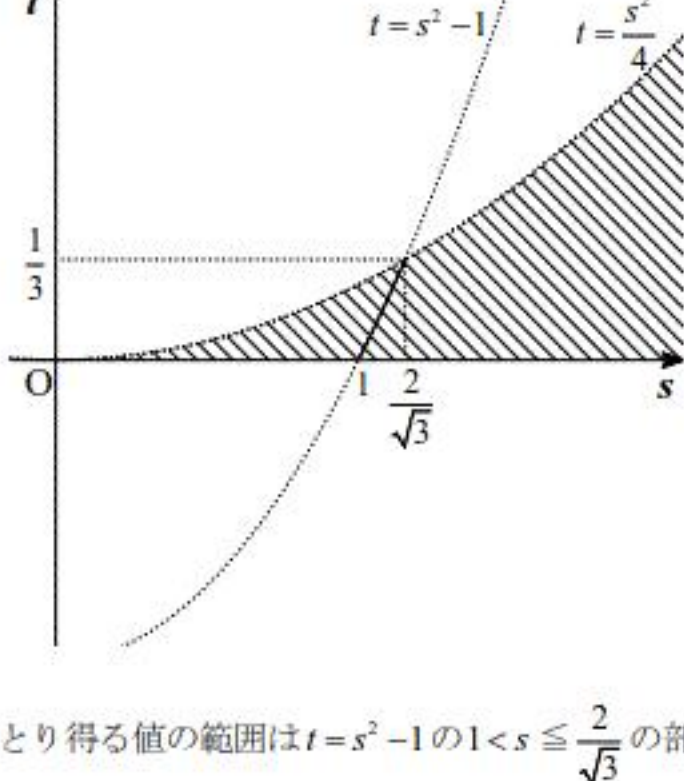
$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} s > 0 \\ t > 0 \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

が成り立つ。次に、 $AB=1$ より、 s, t について

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow |y\vec{v} - x\vec{u}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2xy\vec{u} \cdot \vec{v} + y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 &= 1 \quad (\because 2\vec{u} \cdot \vec{v} = -1) \\ \Leftrightarrow (x+y)^2 - xy &= 1 \\ \therefore s^2 - t &= 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

という関係が求まる。これより、 (s, t) のとり得る値の範囲を図示すると、③、④、⑤より以下

の実線線のようになる。また、斜線線は③かつ④の領域を表し、境界は $t = \frac{s^2}{4}$ のみ含む。



上図のように、 (s, t) のとり得る値の範囲は $t = s^2 - 1$ の $1 < s \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ の部分となる。ここで、

$|\overrightarrow{OR}| = k$ とおくと、

$$\begin{aligned} k &= \frac{xy}{x+y+1} \\ \Leftrightarrow k &= \frac{t}{s+1} \\ \Leftrightarrow t &= k(s+1) \end{aligned}$$

と変形でき、これは (s, t) 平面において定点 $(-1, 0)$ を通る傾き k の直線に帰着できる。よって、

x, y が変化するときの $|\overrightarrow{OR}|$ の最大値とは、直線 $t = k(s+1)$ が $t = s^2 - 1$ の $1 < s \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ の部分と

共有点をもつような k の最大値である。ここで、上図より、傾き k が最大値をとるのは直線

$t = k(s+1)$ が点 $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right)$ を通るときであるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= k\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} &= \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} k \\ \Leftrightarrow k &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2+\sqrt{3}} \\ \therefore k &= \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \end{aligned}$$

となる。よって $\overrightarrow{OR}$ の大きさの最大値は $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$ である。またこのとき、 $s = \frac{2}{\sqrt{3}}, t = \frac{1}{3}$ である

から、 x, y を解に持つ二次方程式 $X^2 - sX + t = 0$ を解くと、最大値をとるとき x, y の値は

$$\begin{aligned} X^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}X + \frac{1}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow X &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \therefore x &= y = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{2\sqrt{3}-3}{3} \left(x = y = \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

【Ⅲ】

(1)

真数の条件より
 $x, y > 0$
である。また、 $x \geq 1, 2 > 1$ より、 $\log_2 x \geq 0$ である。よって

$$\begin{aligned}\log_2 y &= -|\log_2 x| + 2 \\ &= -\log_2 x + 2 \\ &= \log_2 \frac{4}{x}\end{aligned}$$

$$\therefore y = \frac{4}{x}$$

である。これは真数の条件を満たす。

(答) $y = \frac{4}{x}$

(2)

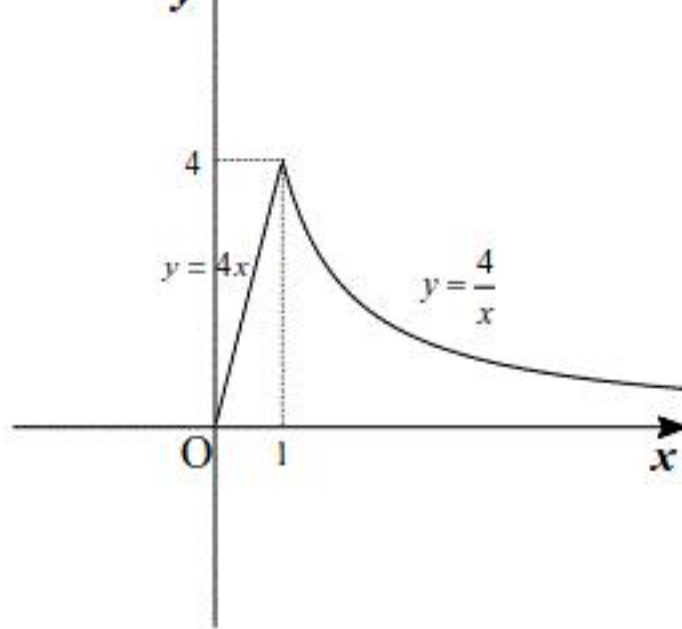
$0 < x < 1$ のとき、 $\log_2 x < 0$ である。よって

$$\begin{aligned}\log_2 y &= -|\log_2 x| + 2 \\ &= \log_2 x + 2 \\ &= \log_2 4x \\ \therefore y &= 4x\end{aligned}$$

である。これは真数の条件を満たす。(1)の結果と合わせて

$$y = \begin{cases} 4x & (0 < x < 1 \text{ のとき}) \\ \frac{4}{x} & (1 \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。これを座標平面上に描くと以下ようになる。



(答) 前図

(3)

x の値で場合分けをする。

[1] $0 < x < 1$ のとき

$$|\log_2 x| = -\log_2 x$$

であるから、与式は

$$\log_2 x = \log_2 x + 2$$

となる。これを満たす実数 x は存在しない。

[2] $x \geq 1$ のとき

$$|\log_2 x| = \log_2 x$$

となるから、与式は

$$\begin{aligned}\log_2 x &= -\log_2 x + 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &= 1 \\ \therefore x &= 2\end{aligned}$$

となる。これは $x \geq 1$ を満たす。

以上[1], [2]より、方程式 $\log_2 x = -|\log_2 x| + 2$ を満たす x は

$$x = 2$$

と求まる。

(答) $x = 2$

(4)

$\log_2 a = b, \log_2 a_n = b_n$ とおくと、漸化式は

$$b_1 = b, b_{n+1} = -|b_n| + 2$$

と書きかえることができる。ここで、 $1 < a < 2$ より、 $0 < b < 1$ であるから

$$b_2 = -b_1 + 2 = -b + 2$$

である。次に、 $1 < b_2 < 2$ より

$$b_3 = -(2 - b) - 2 = b$$

となる。以上より

$$b_n = (-1)^{n-1} (b - 1) + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と予想できる。これを数学的帰納法により示す。

[1] $n = 1$ のとき

$$(-1)^0 (b - 1) + 1 = b$$

より①は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき

$$b_k = (-1)^{k-1} (b - 1) + 1 \text{ が成り立つと仮定すると}$$

$$b_{k+1} = -|b_k| + 2 = -\left|(-1)^{k-1} (b - 1) + 1\right| + 2$$

となる。ここで、 $0 < b < 1$ より、 k の値に関わらず

$$(-1)^{k-1} (b - 1) + 1 > 0$$

が成り立つから、

$$b_{k+1} = -\left\{(-1)^{k-1} (b - 1) + 1\right\} + 2 = (-1)^k (b - 1) + 1$$

となる。よって $n = k + 1$ のときも①は成り立つ。

以上[1], [2]と数学的帰納法により①が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}\log_2 a_n &= (-1)^{n-1} (\log_2 a - 1) + 1 = \log_2 a^{(-1)^{n-1}} 2^{1+(-1)^n} \\ \therefore a_n &= 2^{1+(-1)^n} a^{(-1)^{n-1}}\end{aligned}$$

である。つまり

$$a_n = \begin{cases} a & (n: \text{奇数}) \\ \frac{4}{a} & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

となる。

(答)

$$a_n = \begin{cases} a & (n: \text{奇数}) \\ \frac{4}{a} & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

(5)

$\log_2 a = c, c_n = \log_2 a_n$ とおくと、漸化式は

$$c_1 = c, c_{n+1} = -|c_n| + 2$$

と書きかえることができる。ここで $2^{2015} < a < 2^{2016}$ より $2015 < c < 2016$ である。よって

$$c_2 = -c_1 + 2 = -c + 2$$

となり、 $-2014 < -c + 2 < -2013$ である。さらに

$$c_3 = c_2 + 2 = -c + 4 < 0$$

となる。よって、 $c_n = -c + 2(n - 1)$ ($2 \leq n \leq 1009$)となることが予想される。これを数学的帰納法により示す。

[1] $n = 2$ のとき

$$c_2 = -c + 2 \text{ より成り立つ。}$$

[2] $n = k$ ($2 \leq k \leq 1008$)のとき

$$c_k = -c + 2(k - 1)$$

が成り立つと仮定すると、 $2015 < c < 2016, 2 \leq k \leq 1008$ より、 $c_k < 0$ である。よって

$$c_{k+1} = c_k + 2 = -c + 2k$$

となるから、 $n = k + 1$ のときも成り立つ。

以上[1], [2]と数学的帰納法により、 $c_n = -c + 2(n - 1)$ ($2 \leq k \leq 1009$)である。次に $n \geq 1010$ を

考える。 c の小数部分を d ($0 < d < 1$)とおくと

$$c = 2015 + d$$

と表すことができる。このとき

$$c_{1009} = -(2015 + d) + 1008 \cdot 2 = 1 - d > 0$$

となる。よって

$$c_{1010} = -c_{1009} + 2 = d + 1$$

と求まり、 $0 < d < 1$ より $1 < c_{1010} < 2$ である。よって

$$c_{1011} = -c_{1010} + 2 = 1 - d > 0$$

となり、さらに

$$c_{1012} = -c_{1011} + 2 = d + 1 = c_{1010}$$

となる。よって(4)の結果より、 $n \geq 1010$ のとき

$$c_n = \begin{cases} 1 - d & (n: \text{奇数}) \\ 1 + d & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

と分かる。以上より

$$a_n = \begin{cases} a & (n = 1) \\ \frac{2^{2(n-1)}}{a} & (2 \leq n \leq 1009) \\ \frac{2^{2016}}{a} & (n: 1010 \text{ 以上の奇数}) \\ \frac{a}{2^{2014}} & (n: 1010 \text{ 以上の偶数}) \end{cases}$$

である。したがって、 $c = \log_2 a$ であることに注意すれば、求める数列 $\{a_n\}$ の第 n 項は

$$a_n = \begin{cases} a & (n = 1) \\ \frac{2^{2(n-1)}}{a} & (2 \leq n \leq 1009) \\ \frac{2^{2016}}{a} & (n: 1010 \text{ 以上の奇数}) \\ \frac{a}{2^{2014}} & (n: 1010 \text{ 以上の偶数}) \end{cases}$$

である。

(答)

$$a_n = \begin{cases} a & (n = 1) \\ \frac{2^{2(n-1)}}{a} & (2 \leq n \leq 1009) \\ \frac{2^{2016}}{a} & (n: 1010 \text{ 以上の奇数}) \\ \frac{a}{2^{2014}} & (n: 1010 \text{ 以上の偶数}) \end{cases}$$