

2016年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて解答用紙の所定の箇所に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (7) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (8) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

〔 I 〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

- (1) 自然数 n に対して $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とする. $I_2 =$ ア である. $n \geq 3$ とし, $\sin x = (-\cos x)'$ に注意すると, 部分積分法により, $I_n =$ イ I_{n-2} を得る. m を 3 以上の自然数とすると

$$I_{2m+1} = \frac{\text{ウ} \text{ }}{(2m+1)(2m-1)(2m-3) \cdots 3}$$

$$I_{2m} = \frac{\text{エ} \text{ }}{(2m)(2m-2)(2m-4) \cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

である. また, $0 < I_{2m+2} < I_{2m+1} < I_{2m}$ であるから $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} =$

オ なので,

$$a_m = \frac{(2m)^2(2m-2)^2(2m-4)^2 \cdots 2^2}{(2m+1)(2m-1)^2(2m-3)^2 \cdots 3^2}$$

とすると, $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m =$ カ である.

- (2) 2016 と 2800 の最大公約数は $d =$ キ であり, 最小公倍数は ク である. また, 方程式 $2016x + 2800y = d$ の整数解のうち, $|x| + |y|$ が最小になるものは, $x =$ ケ , $y =$ コ である.

〔 II 〕 $\triangle OAB$ において, 線分 OA を $3:1$ に外分する点を M , 線分 OB を $2:1$ に外分する点を N とする. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ として, 次の問いに答えよ.

- (1) 実数 s, t は $0 < s < 1, 0 < t < 1$ を満たす. 線分 AN を $1-s:s$ に内分する点を P , 線分 BM を $1-t:t$ に内分する点を Q とする. $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}, s$ を用いて表せ. また, $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}, t$ を用いて表せ.
- (2) 2 直線 AN, BM の交点を D とするとき, $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ.
- (3) 2 直線 OD, AB の交点を E とするとき, $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ.
- (4) 直線 EP が直線 OB に平行で, 直線 EQ が直線 OA に平行であるとき, $\triangle OAB$ の面積 S と $\triangle EPQ$ の面積 T について $\frac{T}{S}$ を求めよ.

余白

〔 III 〕 複素数

$$\alpha = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i$$

について、次の問いに答えよ。

(1) α^2 を計算せよ。

(2) α を極形式で表せ。ただし、 α の偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

(3) 方程式 $z^3 = \alpha$ を解き、解を極形式で表せ。

(4) n を自然数とする。複素数 w_n を

$$w_n = (1 + i)\alpha^n$$

によって定めるとき、 w_n が実数となる最小の自然数 n を求めよ。

〔 IV 〕 n を自然数とする。関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^k$$

で定める。 a を $0 < a \leq 1$ を満たす定数として、次の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\int_0^a \frac{dx}{1+x}$ を求めよ。

(2) 次の等式が成立することを示せ。

$$\int_0^a f_n(x) dx = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k}$$

(3) 次の不等式が成立することを示せ。

$$0 < \int_0^a \left(f_n(x) - \frac{1}{1+x} \right) dx < \frac{1}{2n+2}$$

(4) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} a^k}{k}$ の和を求めよ。

以下余白

