

2016年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (7) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (8) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

余 白

〔 I 〕 次の に適する数を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ.

- (1) 1 から 100 までの異なる番号をつけた 100 枚のカードから 1 枚のカードを取り出す. 取り出したカードの番号が 3 の倍数である確率は ア であり, 6 の倍数である確率は イ である. また, 取り出したカードの番号が 144 と互いに素である確率は ウ であり, 144 の約数である確率は エ であり, 144 との最大公約数が 6 である確率は オ である. 取り出したカードの番号が 144 の約数であることがわかっているとき, その番号が 6 の倍数である確率は カ である.
- (2) 座標平面上の曲線 $C : y = xe^x$ の点 $(1, e)$ における法線を ℓ とする. ℓ と x 軸の交点は (キ , 0) であり, ℓ と y 軸の交点は (0, ク) である. また, C , ℓ と y 軸で囲まれた図形を D とすると, D の面積は ケ であり, D を x 軸のまわりで 1 回転させてできる回転体の体積は コ である.

〔 II 〕 複素数平面上の相異なる 3 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ に対して

$$(3 + 9i)\alpha - (8 + 4i)\beta + (5 - 5i)\gamma = 0$$

が成立するとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma}$ の実部と虚部を求めよ.
- (2) $\angle ACB$ の大きさと $\frac{BC}{AC}$ を求めよ.
- (3) $\frac{AB}{AC}$ を求めよ.

〔Ⅲ〕実数 t に対して、直線 $\ell: y = x + t$ と直線 $m: y = -x + \sqrt{t^2 + 4}$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 2 直線 ℓ, m の交点 P の座標を t を用いて表せ。また、直線 ℓ と x 軸との交点 Q の座標を t を用いて表せ。
- (2) t が実数全体を動くとき、点 P の軌跡を求めよ。
- (3) t が $-\sqrt{5} \leq t \leq 0$ の範囲で動くとき、線分 PQ が通過する領域の面積を求めよ。

〔Ⅳ〕2 以上の自然数 n に対し、

$$F_n(\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (0 < \theta < \pi)$$

として、次の問いに答えよ。

- (1) $n \geq 3$ のとき、 $F_{n+1}(\theta) - F_{n-1}(\theta)$ を $\cos n\theta$ を用いて表せ。
- (2) n が偶数のとき、 $F_n(\theta)$ を $\cos \theta, \cos 2\theta, \cos 3\theta, \dots, \cos(n-1)\theta$ を用いて表せ。
- (3) m を自然数とすると、数学的帰納法を用いて、等式

$$F_{2^m}(\theta) = 2^m \cos \theta \cos 2\theta \cos 2^2\theta \cdots \cos 2^{m-1}\theta$$

が成立することを示せ。

- (4) 自然数 k, ℓ に対して、定積分 $\int_0^\pi \cos kx \cos \ell x \, dx$ を求めよ。
- (5) 自然数 m に対して、定積分 $\int_0^\pi (\cos x \cos 2x \cos 2^2x \cdots \cos 2^{m-1}x)^2 \, dx$ を求めよ。

以下余白