

2016年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (7) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (8) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

〔 I 〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

- (1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。関数 $f(\theta) = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ は最小値 ア を $\theta =$ イ でとる。関数 $g(\theta) = \sqrt{3} f(\theta) - 2 \cos(\theta + \frac{\pi}{3})$ は最小値 ウ を $\theta =$ エ でとる。
- (2) 箱から玉を 1 個取り出し、この玉に 1 個の玉を新たに加えた合計 2 個の玉を箱に戻す試行を繰り返す。新たに加える玉の色は白あるいは黒のみとする。最初に、2 個の白玉と 3 個の黒玉が入っている箱を考える。新たに加える玉の色は取り出した玉と同色とすると、3 回目の試行において白玉を取り出す確率は オ 、 n 回目の試行において白玉を取り出す確率 P_n は カ 、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ は キ である。次に、3 個の白玉と 4 個の黒玉が入っている箱を考える。新たに加える玉の色は取り出した玉と異なる色とすると、3 回目の試行において白玉を取り出す確率は ク である。 n 回目の試行において白玉を取り出す確率を Q_n とすると、 Q_n は漸化式 $Q_n =$ ケ $Q_{n-1} + \frac{1}{6+n}$ ($n \geq 2$) を満たし、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n$ は コ である。

〔 II 〕 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(u) = \log(\sqrt{u} - 1) - \log(\sqrt{u} + 1)$ の導関数 $f'(u)$ を求めよ。
- (2) 関数 $F(x) = \log(\sqrt{e^{2x} + 1} - 1) - \log(\sqrt{e^{2x} + 1} + 1)$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ。
- (3) 等式 $\sqrt{e^{2x} + 1} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + 1}} + \frac{1}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$ を用いて、不定積分 $\int \sqrt{e^{2x} + 1} dx$ を求めよ。
- (4) 曲線 $y = e^x$ ($\frac{1}{2} \log 8 \leq x \leq \frac{1}{2} \log 24$) の長さを求めよ。

〔Ⅲ〕 座標空間内の2点 $A(0, 1, 5)$, $B(5, 6, 0)$ を通る直線を ℓ とする.
点 $P(4, 8, 13)$ および直線 ℓ 上の2点 Q, R を頂点とする $\triangle PQR$ が正三角形であるとする. 次の問いに答えよ.

- (1) 直線 ℓ に, 点 P から垂線を下ろし, 直線 ℓ との交点を H とする. 点 H の座標を求めよ.
- (2) 正三角形 $\triangle PQR$ の一辺の長さを求めよ.
- (3) 四面体 $PQRS$ が正四面体になるようなすべての点 S の座標を求めよ.

〔Ⅳ〕 n を自然数, k を0以上の整数とする. また, $f(x) = |x \sin(nx)|$,
 $x_k = \frac{k\pi}{n}$, $\alpha_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $T_k = \int_{x_k}^{\alpha_k} f(x) dx$ とする. T_k を n, k を用いて表し, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n T_k \text{ を求めよ.}$$

- (2) $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ の範囲で, 関数 $f(x)$ が最大値をとるときの x の値を β_k とする. $U_k = \int_{x_k}^{\beta_k} f(x) dx$ とおくと, ある定数 b を用いて

$$U_k = \frac{k\pi + b|\sin(n\beta_k)|}{n^2} \text{ と表される. 定数 } b \text{ の値を求めよ. また,}$$

$$\text{極限 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n U_k \text{ を求めよ.}$$

- (3) $x_k \leq x \leq \alpha_k$ の範囲で, 関数 $g(x) = |x \cos(nx)|$ が最大値をとるときの x の値を γ_k とする. この γ_k と (2) の β_k に対して,

$$V_k = \int_{\gamma_k}^{\beta_k} f(x) dx \text{ とおく. 極限 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n V_k \text{ を求めよ.}$$