

〔Ⅰ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	$-\sin t$	e^{-1}	e	$2e^{-\sqrt{e}}$	1
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	$\frac{5}{49}$	279	172	$k-1$	$\frac{5}{49}$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}f'(t) &= e^{\cos t}(-\sin t) \\ \therefore \frac{f'(t)}{f(t)} &= -\sin t\end{aligned}$$

である。実数 t を用いて曲線 C を媒介変数表示すると、

$$\begin{cases}x = e^{\cos t} \\ y = e^{\sin t}\end{cases} \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

となるから、 C 上の点 P の座標 (a, b) は $(e^{\cos t}, e^{\sin t})$ と表せる。まず、 $a = e^{\cos t}$ は $\cos t = -1$ のと

き最小値 e^{-1} をとり、 $\cos t = 1$ のとき最大値 e をとる。また、 $e^{2\cos t}, e^{2\sin t} \geq 0$ であるから、相

加・相乗平均の不等式より、

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= e^{2\cos t} + e^{2\sin t} \\ &\geq 2\sqrt{e^{2\cos t} \cdot e^{2\sin t}} \\ &= 2e^{\cos t + \sin t}\end{aligned}$$

となり、不等式の等号は $t = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$ の場合に成り立つ。一方、

$$\begin{aligned}\cos t + \sin t &= \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \\ &\geq -\sqrt{2}\end{aligned}$$

となり、不等式の等号は $t = \frac{5}{4}\pi$ の場合に成り立つ。以上をまとめると、

$$a^2 + b^2 \geq 2e^{\cos t + \sin t} \geq 2e^{-\sqrt{2}}$$

となり、 $t = \frac{5}{4}\pi$ の場合に限り両方の等号が成り立つから、 $a^2 + b^2$ の最小値は $2e^{-\sqrt{2}}$ である。ま

た、 C の接線の傾きが 0 となるとき

$$\frac{dx}{dt} \neq 0 \text{ かつ } \frac{dy}{dt} = 0$$

を満たす。

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (-e^{\cos t} \sin t, e^{\sin t} \cos t)$$

であるから、 P における C の接線の傾きが 0 となるとき

$$\begin{aligned}\cos t &= 0 \\ \therefore t &= \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

である。したがって、 $a = 1$ である。

(2)

$a < b < c$ となる取り出し方は ${}_7C_3$ 通りであり、取り出し方の総数は 7^3 通りであるから、この

場合の確率は

$$\frac{{}_7C_3}{7^3} = \frac{5}{49}$$

である。次に、 $a \times b \times c$ の値が奇数となる取り出し方は 4^3 通りであるから、 $a \times b \times c$ の値が偶数

となる確率は

$$1 - \frac{4^3}{7^3} = \frac{279}{343}$$

である。さらに、 $a + b + c$ の値が奇数となるのは、奇数が 3 回出る場合または、奇数が 1 回、偶

数が 2 回出る場合であるから、この場合の確率は

$$\frac{4^3 + {}_3C_1 \cdot 4 \cdot 3^2}{7^3} = \frac{172}{343}$$

である。 $a + b = k$ となる取り出し方は $k-1$ 通りであり、 $c \leq 7-k$ となる取り出し方は $7-k$ 通

りであるから、両方を満たす確率は

$$\frac{(7-k)(k-1)}{343}$$

である。したがって、 $a + b + c \leq 7$ となる確率は

$$\sum_{k=2}^6 \frac{(7-k)(k-1)}{343} = \frac{5}{49}$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

直線 ℓ_1 の傾きは1であるから、 ℓ_1 に垂直な直線 ℓ_2 の傾きは -1 である。よって、 ℓ_2 の方程式は

$$y = -(x-a) + a = -x + 2a$$

であり、これが放物線 C_1 と点 $(b, f(b))$ で接する。ここで、

$$f(x) = 11x - 9\sqrt{2}x^2$$

$$f'(x) = 11 - 18\sqrt{2}x$$

より、 C_1 と ℓ_2 が接するための必要十分条件は、

$$\begin{cases} f(b) = -b + 2a \\ f'(b) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11b - 9\sqrt{2}b^2 = -b + 2a \\ 11 - 18\sqrt{2}b = -1 \end{cases}$$

$$\therefore a = \sqrt{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = \sqrt{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

(2)

(1)の結果から、実数 t の範囲は $0 < t < 2$ となり、

$$C_2: y = f(x) \quad (0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{3})$$

となる。第1象限にある ℓ_1 上の点 P が $OP = t$ であるとき、点 P の座標は

$$P\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

である。よって、 P を通り ℓ_1 に垂直な直線の方程式は

$$y = -\left(x - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{t}{\sqrt{2}} = -x + \sqrt{2}t$$

である。これと C_2 の交点 Q の x 座標は

$$11x - 9\sqrt{2}x^2 = -x + \sqrt{2}t$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 6\sqrt{2}x + t = 0$$

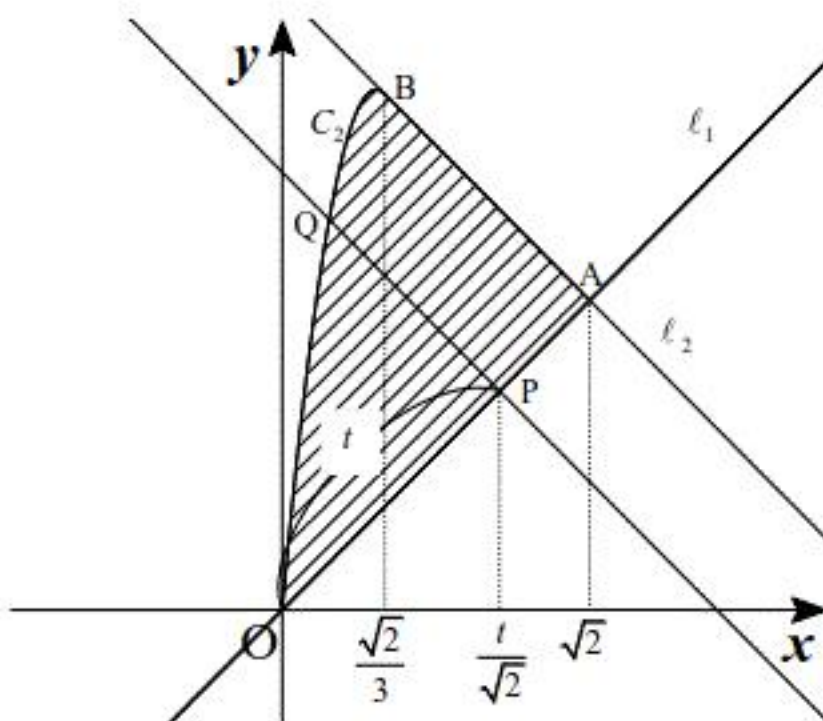
$$\therefore x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2-t}}{3} \quad (\because 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{3})$$

である。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2-t}}{3}$$

(3)

C_2, ℓ_1, ℓ_2 , および点 P を通り ℓ_1 に垂直な直線を図示すると、以下のようになる。



したがって、求める体積を V とすると、

$$V = \pi \int_0^2 PQ^2 dt$$

となる。ここで、直線 PQ の傾きが -1 であることから、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \left\{ \sqrt{2} \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2-t}}{3} \right) \right\}^2 \\ &= \left(t - \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{4-2t}}{3} \right)^2 \\ &= t^2 + \frac{4}{9} + \frac{4-2t}{9} - \frac{4}{3}t - \frac{4\sqrt{4-2t}}{9} + \frac{2t\sqrt{4-2t}}{3} \\ &= t^2 - \frac{14}{9}t + \frac{8}{9} - \frac{1}{3}(4-2t)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{9}\sqrt{4-2t} \end{aligned}$$

となる。よって、求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left(t^2 - \frac{14}{9}t + \frac{8}{9} - \frac{1}{3}(4-2t)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{9}\sqrt{4-2t} \right) dt \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{9}t^2 + \frac{8}{9}t - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}(4-2t)^{\frac{5}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3}(4-2t)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_0^2 \\ &= \left\{ \frac{4}{3} - \left(\frac{32}{15} - \frac{64}{27} \right) \right\} \pi \\ &= \frac{212}{135} \pi \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{212}{135} \pi$$

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned} f &= |\overline{AP} + \overline{AQ}|^2 - |\overline{AP}|^2 - |\overline{AQ}|^2 \\ &= |\overline{AP}|^2 + 2\overline{AP} \cdot \overline{AQ} + |\overline{AQ}|^2 - |\overline{AP}|^2 - |\overline{AQ}|^2 \\ &= 2\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \end{aligned}$$

と変形できる。また、 C_1, C_2 の方程式を変形すると、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 &= 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 &= 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 4 \end{aligned}$$

となるから、 C_1, C_2 はそれぞれ $(3, -2)$ を中心とする半径 1 の円、 $(-1, 1)$ を中心とする半径 2 の円を表す。これより、 Q の座標は β ($0 \leq \beta < 2\pi$) を用いて $(-1 + 2\cos\beta, 1 + 2\sin\beta)$ と表せる。このとき、

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= (2, 1) \\ \overline{AQ} &= (-2 + 2\cos\beta, 3 + 2\sin\beta) \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} f &= 2\{2 \cdot (-2 + 2\cos\beta) + 1 \cdot (3 + 2\sin\beta)\} \\ &= -2 + 8\cos\beta + 4\sin\beta \\ &= -2 + 4\sqrt{5}\sin(\beta + \phi) \end{aligned}$$

となる。ただし、 ϕ は $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\phi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす。よって、 f は $\sin(\beta + \phi) = 1$ となる β で最大値をとる。このとき、 $\cos(\beta + \phi) = 0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \sin(\beta + \phi) = 1 \\ \cos(\beta + \phi) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\beta\cos\phi + \cos\beta\sin\phi = 1 \\ \cos\beta\cos\phi - \sin\beta\sin\phi = 0 \end{cases} \\ &\therefore \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

となるから、求める Q の座標は $\left(-1 + \frac{4}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ である。

$$(\text{答}) \left(-1 + \frac{4}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

(2)

C_2 の中心を点 $O_2(-1, 1)$ とするとき、 C_2 上の点 R における C_2 の接線と直線 O_2R は垂直になる。したがって、 C_2 上の点 R における C_2 の接線が直線 AP と垂直になるとき、直線 O_2R と直線 AP は平行になる。ここで、 $\overline{O_2R} = (2\cos\beta, 2\sin\beta)$ 、 $\overline{AP} = (2, 1)$ と表せるから、これらのベクトルが平行になるとき、

$$\begin{aligned} (2\cos\beta) : (2\sin\beta) &= 2 : 1 \\ \Leftrightarrow \cos\beta &= 2\sin\beta \end{aligned}$$

となるから、関係式 $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ に代入すると、

$$\begin{aligned} \sin^2\beta + 4\sin^2\beta &= 1 \\ \therefore (\cos\beta, \sin\beta) &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \end{aligned}$$

と求まる。以上より、求める R の座標は $\left(-1 + \frac{4}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-1 - \frac{4}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ である。

$$(\text{答}) \left(-1 + \frac{4}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-1 - \frac{4}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

(3)

点 P の座標を α ($0 \leq \alpha < 2\pi$) を用いて $(3 + \cos\alpha, -2 + \sin\alpha)$ とおくと、

$$\overline{AP} = (2 + \cos\alpha, \sin\alpha)$$

より、

$$\begin{aligned} f &= 2\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \\ &= 2\{(2 + \cos\alpha) \cdot (-2 + 2\cos\beta) + \sin\alpha \cdot (3 + 2\sin\beta)\} \\ &= -8 - 4\cos\alpha + 6\sin\alpha + (8 + 4\cos\alpha)\cos\beta + 4\sin\alpha\sin\beta \\ &= -8 - 4\cos\alpha + 6\sin\alpha + \sqrt{(8 + 4\cos\alpha)^2 + (4\sin\alpha)^2} \sin(\beta + \psi) \\ &= -8 - 4\cos\alpha + 6\sin\alpha + 4\sqrt{4\cos\alpha + 5} \sin(\beta + \psi) \\ &\leq -8 - 4\cos\alpha + 6\sin\alpha + 4\sqrt{4\cos\alpha + 5} \quad (\because -1 \leq \sin(\beta + \psi) \leq 1) \end{aligned}$$

となる。ただし、 ψ は $\sin\psi = \frac{\cos\alpha + 2}{\sqrt{4\cos\alpha + 5}}, \cos\psi = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{4\cos\alpha + 5}}$ を満たす定数である。よって、

$$m = -8 - 4\cos\alpha + 6\sin\alpha + 4\sqrt{4\cos\alpha + 5}$$

である。ここで、 $m = 0$ となるときの、

$$\begin{aligned} -8 - 4\cos\alpha + 6\sin\alpha + 4\sqrt{4\cos\alpha + 5} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4 + 2\cos\alpha - 3\sin\alpha &= 2\sqrt{4\cos\alpha + 5} \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

が成り立つ。①の左辺が正であると仮定し、①の両辺を 2 乗して整理すると、

$$\begin{aligned} (4 + 2\cos\alpha - 3\sin\alpha)^2 &= 4(4\cos\alpha + 5) \\ \Leftrightarrow \sin\alpha(5\sin\alpha - 12\cos\alpha - 24) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$5\sin\alpha - 12\cos\alpha - 24 \leq 5 + 12 - 24 < 0$$

であるから、

$$\sin\alpha = 0$$

となり、このとき確かに①の左辺は正となる。以上より、 $\sin\alpha = 0$ のときに $m = 0$ となることが分かる。 $\sin\alpha = 0$ のとき $\cos\alpha = \pm 1$ であるから、求める P の座標は $(4, -2), (2, -2)$ となる。

$$(\text{答}) (4, -2), (2, -2)$$

【Ⅳ】

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b_1 = 1, b_2 = 2, b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$c_1 = 1, c_2 = 1, c_{n+2} = \frac{c_{n+1}(c_{n+1} + 1)}{c_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立っている。

(1)

①, ②より

$$a_3 = 4a_2 - a_1 = 3$$

$$a_4 = 4a_3 - a_2 = 11$$

$$b_3 = 4b_2 - b_1 = 7$$

$$b_4 = 4b_3 - b_2 = 26$$

であるから、

$$a_3b_3 = 3 \cdot 7 = 21$$

$$a_4b_3 = 11 \cdot 7 = 77$$

$$a_4b_4 = 11 \cdot 26 = 286$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_3b_3 = 21, a_4b_3 = 77, a_4b_4 = 286$$

(2)

次の等式

$$a_nb_{n+1} = a_{n+1}b_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{4}$$

$$a_{n+2}b_n = a_{n+1}b_{n+1} + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{5}$$

を、数学的帰納法を利用して証明する。

[1] $n=1$ のとき

①, ②より

$$a_1b_2 = a_2b_1 + 1 = 2$$

$$a_3b_1 = a_2b_2 + 1 = 3$$

であるため、④, ⑤は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

④, ⑤が成り立つと仮定し、 $n=k+1$ のときにも④, ⑤が成り立つことを示す。まず、

$$\begin{aligned} a_{k+1}b_{k+2} - a_{k+2}b_{k+1} - 1 &= a_{k+1}(4b_{k+1} - b_k) - (4a_{k+1} - a_k)b_{k+1} - 1 \\ &= -a_{k+1}b_k + a_kb_{k+1} - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、

$$a_{k+1}b_{k+2} = a_{k+2}b_{k+1} + 1$$

となるから、 $n=k+1$ の場合も④が成り立つ。一方、

$$\begin{aligned} a_{k+3}b_{k+1} - a_{k+2}b_{k+2} - 1 &= (4a_{k+2} - a_{k+1})b_{k+1} - a_{k+2}(4b_{k+1} - b_k) - 1 \\ &= -a_{k+1}b_{k+1} + a_{k+2}b_k - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、

$$a_{k+3}b_{k+1} = a_{k+2}b_{k+2} + 1$$

となるから、 $n=k+1$ の場合も⑤が成り立つ。

以上[1], [2]より、 $n=1, 2, 3, \dots$ において④, ⑤は成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

③を利用し、 c_n を順次計算すると、

$$c_3 = 2, c_4 = 6, c_5 = 21, c_6 = 77, c_7 = 286, \dots$$

となるから、自然数 l において、

$$\begin{cases} c_{2l-1} = a_lb_l \\ c_{2l} = a_{l+1}b_l \end{cases} \quad \dots \textcircled{6}$$

と推測できる。以下、これを数学的帰納法で証明する。

[1] $l=1$ のとき

①, ②, ③より、

$$c_1 = a_1b_1 = 1$$

$$c_2 = a_2b_1 = 1$$

となるから、⑥は成り立つ。

[2] $l=k$ のとき

⑥が成り立つと仮定し、 $l=k+1$ のときにも⑥が成立することを示す。(2)で求めた関係を利用して c_{2k+1} を変形すると、

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= \frac{c_{2k}(c_{2k} + 1)}{c_{2k-1}} \\ &= \frac{a_{k+1}b_k(a_{k+1}b_k + 1)}{a_kb_k} \\ &= \frac{a_{k+1}b_k \cdot a_kb_{k+1}}{a_kb_k} \\ &= a_{k+1}b_{k+1} \end{aligned}$$

となる。同様に c_{2k+2} を変形すると、

$$\begin{aligned} c_{2k+2} &= \frac{c_{2k+1}(c_{2k+1} + 1)}{c_{2k}} \\ &= \frac{a_{k+1}b_{k+1}(a_{k+1}b_{k+1} + 1)}{a_{k+1}b_k} \\ &= \frac{a_{k+1}b_{k+1} \cdot a_{k+2}b_k}{a_{k+1}b_k} \\ &= a_{k+2}b_{k+1} \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{cases} c_{2(k+1)-1} = a_{k+1}b_{k+1} \\ c_{2(k+1)} = a_{(k+1)+1}b_{k+1} \end{cases}$$

となるから、 $l=k+1$ の場合も⑥が成り立つ。

以上[1], [2]より、⑥が示された。ここで、 a_1, a_2 は整数であり、 a_n, a_{n+1} が整数のときは①より a_{n+2} も整数となるから、帰納的に a_n はすべて整数である。同様に、 b_n もすべて整数である。したがって、⑥より c_n はすべて整数である。

(証明終)