

【1】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	$3n-2$	3	16	25	1
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$	$\frac{n(n-2)}{2}$	$\frac{n(n-2)(n-4)}{8}$	$\frac{n(n-1)(n-3)}{8}$	$\frac{(n+1)n(n-1)}{24}$

〔解説〕

(1)

数列 $\{a_n\}$ は、初項1、公差3の等差数列である。よって、

$$a_n=3n-2 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。①が7の倍数であるとき、自然数 k を用いて

$$3n-2=7k$$

と表すことができ、これを満たす最小の n すなわち d は、 $k=1$ のときの3である。

$n=1, 2, \cdots, 100$ のとき、 $a_n=1, 4, \cdots, 298$ であるから、自然数 x, x', y, y', y'' を定めると

$$n=7x-4 \text{ のとき、 } a_n=7(3x-2) \text{ (7の倍数) } \therefore 7 \text{ の倍数は14個}$$

$$\text{その内 } x=7x'-4 \text{ のとき、 } a_n=7^2(3x'-2) \text{ (7}^2 \text{の倍数) } \therefore 7^2 \text{ の倍数は2個}$$

$$n=5y-1 \text{ のとき、 } a_n=5(3y-1) \text{ (5の倍数) } \therefore 5 \text{ の倍数は20個}$$

$$\text{その内 } y=5y'-3 \text{ のとき、 } a_n=5^2(3y'-2) \text{ (5}^2 \text{の倍数) } \therefore 5^2 \text{ の倍数は4個}$$

$$\text{更にその内 } y'=5y''-1 \text{ のとき、 } a_n=5^3(3y''-1) \text{ (5}^3 \text{の倍数) } \therefore 5^3 \text{ の倍数は1個}$$

であるから、素因数7の個数は16個、素因数5の個数は25個と求められる。また、 $a_1=1$ 、

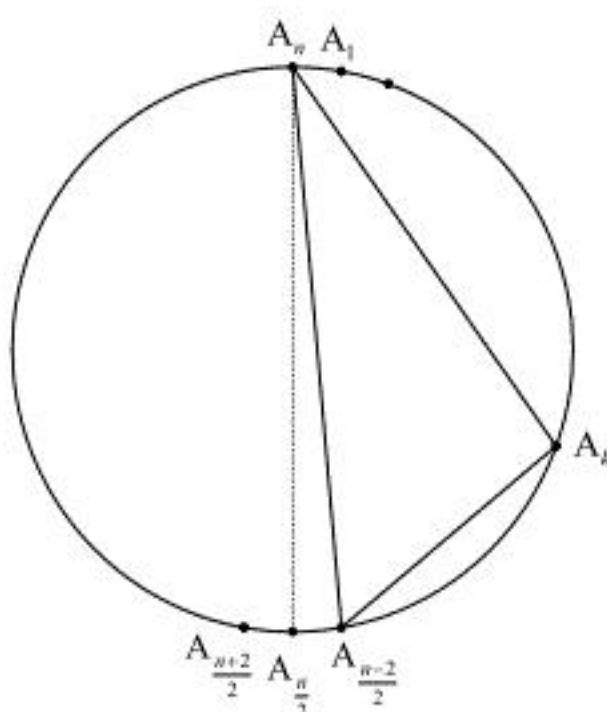
$$a_{n+1}=3n+1 \text{ であるから、 } N=a_1a_2\cdots a_{100} \text{ は}$$

$$N=1(3\cdot 1+1)(3\cdot 2+1)\cdots (3\cdot 99+1)$$

と書ける。これを展開すると、末項の1以外すべての項に3を因数として含むから、 N を3で

割った余りは1とわかる。

(2)



異なる3点の選び方は ${}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 通り存在する。 n が偶数のとき、結んだ3点が直角

三角形となるのは、2点を結ぶ線分が円の直径となるときである。今、1点を A_n に固定する

と、もう1点は円の反対側に位置する $A_{\frac{n}{2}}$ に決定され、もう1点は残りの $n-2$ 点から選ぶ。直

径は全部で $\frac{n}{2}$ 本引けるので、直角三角形となる点の選び方は

$$\frac{n}{2} \cdot (n-2) = \frac{n(n-2)}{2}$$

と求められる。一方、時計回りに考えて鈍角になる点の左になる点を A_n に固定したとき、鈍

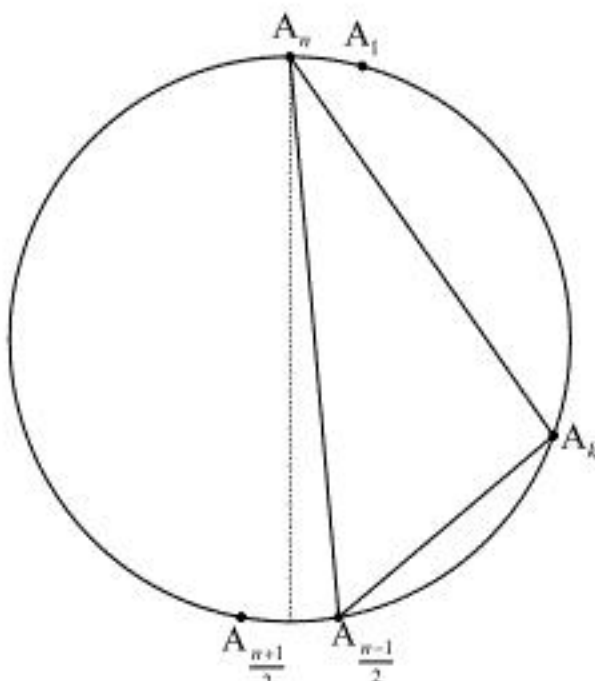
角三角形となるのは A_n を通る直径の片側から残りの2点を選んだときである。上図のように

右側から選ぶとすると、残りの2点の選び方は

$$\begin{aligned} \frac{n-2}{2} C_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-4}{2} \\ &= \frac{(n-2)(n-4)}{8} \text{ (通り)} \end{aligned}$$

である。固定した A_n となる点の選び方は n 通り存在するので、求める選び方は

$$\frac{n(n-2)(n-4)}{8} \text{ 通りである。}$$



n が奇数のとき、2点から直径は作れないので、結んだ3点が直角三角形となることはない。

よって、鋭角三角形か鈍角三角形のどちらかができる。偶数と同様に時計回りで鈍角になる

点の左になる点を A_n に固定したとき上図のように右側から選ぶと、鈍角三角形を作る

残りの2点の選び方は

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{2} C_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \\ &= \frac{(n-1)(n-3)}{8} \text{ (通り)} \end{aligned}$$

である。固定した A_n となる点の選び方は n 通り存在するので、求める選び方は

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)(n-3)}{8} \text{ 通りである。よって、鋭角三角形は} \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-1)(n-3)}{8} &= \frac{n(n-1)}{24} \{4(n-2)-3(n-3)\} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)}{24} \text{ (通り)} \end{aligned}$$

である。

【Ⅱ】

(1)

$$f(x)=x^3-ax+a$$
$$f'(x)=3x^2-a$$

である。 $a>0$ より、 $f'(x)=0$ とすると、

$$3x^2-a=0$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{a}{3}$$
$$\therefore x=\pm\sqrt{\frac{a}{3}}$$

である。したがって、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より、 $f(x)$ は $x=-\sqrt{\frac{a}{3}}$ で極大値

$$f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3-a\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)+a=a+\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

を、 $x=\sqrt{\frac{a}{3}}$ で極小値

$$f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3-a\sqrt{\frac{a}{3}}+a=a-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

をとる。

$$(答)\left\{\begin{array}{l} \text{極大値: } a+\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} \quad \left(x=-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \\ \text{極小値: } a-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} \quad \left(x=\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \end{array}\right.$$

(2)

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点の個数は、方程式 $f(x)=g(x)$ の異なる実数解の個数に等しい。

$$f(x)=g(x)$$
$$\Leftrightarrow x^3-ax+a=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$$
$$\Leftrightarrow 3ax^2+a(3a+1)x+a(a^2-1)=0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+(3a+1)x+(a^2-1)=0\left(\because a>0\right) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となるから、2次方程式①が異なる2つの実数解をもつことが必要十分である。①の判別式を D とすると、

$$D>0$$
$$\Leftrightarrow (3a+1)^2-4\cdot 3(a^2-1)>0$$
$$\Leftrightarrow 3a^2-6a-13<0$$
$$\Leftrightarrow 1-\frac{4}{3}\sqrt{3}<a<1+\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

となる。したがって、 $a>0$ より、求める a の値の範囲は

$$0<a<1+\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

である。

$$(答) \quad 0<a<1+\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

(3)

a が $0<a<1+\frac{4}{3}\sqrt{3}$ を満たすとき、 $y=f(x)$ 、 $y=g(x)$ は異なる2点で交わる。ここで、

$$g(x)-f(x)=a\left\{3x^2+(3a+1)x+(a^2-1)\right\}$$

より、①の異なる2解を α 、 β ($\alpha<\beta$) とすると、

$$\begin{cases} g(x)>f(x) \left(x<\alpha, \beta<x\right) \\ g(x)<f(x) \left(\alpha<x<\beta\right) \end{cases}$$

となる。したがって、2つのグラフで囲まれる図形の面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{f(x)-g(x)\right\}dx$$
$$=-3a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3$$

となる。ここで、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-a-\frac{1}{3} \\ \alpha\beta=\frac{a^2-1}{3} \end{cases}$$

であるから、

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=\left(-a-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}(a^2-1)$$
$$=-\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}a+\frac{13}{9}$$
$$=\frac{1}{9}(-3a^2+6a+13)$$
$$(\beta-\alpha)^3=\left\{\frac{1}{9}(-3a^2+6a+13)\right\}^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{27}(-3a^2+6a+13)^{\frac{3}{2}}$$

となる。したがって、求める面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{27}(-3a^2+6a+13)^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{a}{54}(-3a^2+6a+13)^{\frac{3}{2}}$$

である。

$$(答) \quad S(a)=\frac{a}{54}(-3a^2+6a+13)^{\frac{3}{2}}$$

(4)

$0<a<1+\frac{4}{3}\sqrt{3}$ のとき、 $-3a^2+6a+13>0$ であり、

$$\frac{S(a)}{a}=\frac{1}{54}(-3a^2+6a+13)^{\frac{3}{2}}$$

となる。よって、 $-3a^2+6a+13$ が最大となるとき、 $\frac{S(a)}{a}$ も最大となる。

$$-3a^2+6a+13=-3(a-1)^2+16$$

と変形できるから、 $\frac{S(a)}{a}$ は $a=1$ のとき、最大値

$$\frac{1}{54}\cdot 16^{\frac{3}{2}}=\frac{32}{27}$$

をとる。

$$(答) \quad \text{最大値: } \frac{32}{27} \quad (a=1)$$

〔Ⅲ〕

(1)

k, ℓ, m を実数とする。条件より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OP}} &= p\vec{a} \\ \overrightarrow{\text{OQ}} &= q\vec{b} \\ \overrightarrow{\text{OL}} &= (1-p)\vec{b} + p\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。点 M は線分 AC 上に存在するから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OM}} &= \overrightarrow{\text{OA}} + k\overrightarrow{\text{AC}} \\ &= (1-k)\vec{a} + k\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。また、点 D は線分 QM 上に存在するから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OD}} &= \overrightarrow{\text{OQ}} + \ell\overrightarrow{\text{QM}} \\ &= q\vec{b} + \ell(\overrightarrow{\text{OM}} - \overrightarrow{\text{OQ}}) \\ &= \ell(1-k)\vec{a} + q(1-\ell)\vec{b} + k\ell\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。さらに、点 D は線分 PL 上に存在するから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OD}} &= \overrightarrow{\text{OP}} + m\overrightarrow{\text{PL}} \\ &= p\vec{a} + m(\overrightarrow{\text{OL}} - \overrightarrow{\text{OP}}) \\ &= p(1-m)\vec{a} + m(1-p)\vec{b} + mp\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるから、係数比較することで、

$$\begin{cases} \ell(1-k) = p(1-m) \\ q(1-\ell) = m(1-p) \\ k\ell = mp \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = q \\ \ell = p \\ m = q \end{cases}$$

と k, ℓ, m を p, q で表せる。よって、 $\overrightarrow{\text{OM}} = (1-q)\vec{a} + q\vec{c}$, $\overrightarrow{\text{OD}} = p(1-q)\vec{a} + q(1-p)\vec{b} + pq\vec{c}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{\text{OM}} = (1-q)\vec{a} + q\vec{c}, \overrightarrow{\text{OD}} = p(1-q)\vec{a} + q(1-p)\vec{b} + pq\vec{c}$$

(2)

α, β, γ を実数とする。点 R は線分 OC 上に存在するから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OR}} &= \alpha\overrightarrow{\text{OC}} \\ &= \alpha\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。また、点 N は線分 AB 上に存在するから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{ON}} &= \overrightarrow{\text{OA}} + \beta\overrightarrow{\text{AB}} \\ &= (1-\beta)\vec{a} + \beta\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。さらに、点 D は線分 RN 上に存在するから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OD}} &= \overrightarrow{\text{OR}} + \gamma\overrightarrow{\text{RN}} \\ &= \alpha\vec{c} + \gamma(\overrightarrow{\text{ON}} - \overrightarrow{\text{OR}}) \\ &= \gamma(1-\beta)\vec{a} + \beta\gamma\vec{b} + \alpha(1-\gamma)\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。(1)より $\overrightarrow{\text{OD}} = p(1-q)\vec{a} + q(1-p)\vec{b} + pq\vec{c}$ と表せるから、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立より係数

比較することで、

$$\begin{cases} \gamma(1-\beta) = p(1-q) \\ \beta\gamma = q(1-p) \\ \alpha(1-\gamma) = pq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{pq}{1-p-q+2pq} \\ \beta = \frac{q(1-p)}{p+q-2pq} \\ \gamma = p+q-2pq \end{cases}$$

と α, β, γ を p, q で表せる。よって $\overrightarrow{\text{OR}} = \frac{pq}{1-p-q+2pq}\vec{c}$, $\overrightarrow{\text{ON}} = \frac{p(1-q)}{p+q-2pq}\vec{a} + \frac{q(1-p)}{p+q-2pq}\vec{b}$ と

なる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{\text{OR}} = \frac{pq}{1-p-q+2pq}\vec{c}, \overrightarrow{\text{ON}} = \frac{p(1-q)}{p+q-2pq}\vec{a} + \frac{q(1-p)}{p+q-2pq}\vec{b}$$

(3)

$q=1-p$ より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OP}} &= p\vec{a} \\ \overrightarrow{\text{OQ}} &= (1-p)\vec{b} \\ \overrightarrow{\text{OL}} &= (1-p)\vec{b} + p\vec{c} \\ \overrightarrow{\text{OM}} &= p\vec{a} + (1-p)\vec{c}\end{aligned}$$

となる。 $\triangle \text{PQM}$, $\triangle \text{LQM}$ の面積をそれぞれ S_{PQM} , S_{LMQ} とおく。 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ を考慮すると、 S_{PQM} , S_{LMQ} は、

$$\begin{aligned}S_{\text{PQM}} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|\overrightarrow{\text{PM}}|^2 \cdot |\overrightarrow{\text{PQ}}|^2 - (\overrightarrow{\text{PM}} \cdot \overrightarrow{\text{PQ}})^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(1-p)^2 c^2 \cdot \{p^2 a^2 + (1-p)^2 b^2\} - 0} \\ &= \frac{c(1-p)}{2} \cdot \sqrt{p^2 a^2 + (1-p)^2 b^2} \\ S_{\text{LMQ}} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|\overrightarrow{\text{LM}}|^2 \cdot |\overrightarrow{\text{LQ}}|^2 - (\overrightarrow{\text{LM}} \cdot \overrightarrow{\text{LQ}})^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\{p^2 a^2 + (p-1)^2 b^2 + (1-2p)^2 c^2\} p^2 c^2 - \{p(1-2p)c^2\}^2} \\ &= \frac{cp}{2} \cdot \sqrt{p^2 a^2 + (1-p)^2 b^2}\end{aligned}$$

とそれぞれ p, a, b, c を用いて表せる。したがって、

$$\begin{aligned}S(p) &= S_{\text{PQM}} + S_{\text{LMQ}} \\ &= \frac{c}{2} \cdot \sqrt{p^2 a^2 + (1-p)^2 b^2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(p) = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{p^2 a^2 + (1-p)^2 b^2}$$

(4)

$S(p) = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{p^2 a^2 + (1-p)^2 b^2}$ が最小となるのは $p^2 a^2 + (1-p)^2 b^2$ が最小となるときである。この p の 2 次式は、

$$\begin{aligned}p^2 a^2 + (1-p)^2 b^2 &= (a^2 + b^2)p^2 - 2b^2 p + b^2 \\ &= (a^2 + b^2) \left(p - \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

と因数分解できる。よって $S(p)$ は $p = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$ のとき最小値をとり、その値は、

$$\begin{aligned}S\left(\frac{b^2}{a^2 + b^2}\right) &= \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{abc}{2\sqrt{a^2 + b^2}}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(p) \text{ の最小値 : } \frac{abc}{2\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad p \text{ の値 : } \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$