

2017年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)にそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 解答はすべて解答用紙の所定の箇所に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (4) 問題紙の本文は2ページである。
- (5) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (6) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (7) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (8) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

余 白

〔Ⅰ〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

- (1) 関数 $f(t) = e^{\cos t}$ に対して、 $\frac{f'(t)}{f(t)} =$ ア である。次に、座標平面上の曲線 $C: (\log x)^2 + (\log y)^2 = 1$ とし、 C 上の点 P の座標を (a, b) とする。 P が C 上の点全体を動くとき、 a の最小値と最大値はそれぞれ イ , ウ であり、 $a^2 + b^2$ の最小値は エ である。また、 P における C の接線の傾きが 0 となるのは $a =$ オ のときである。

- (2) 袋に 1 から 7 までの異なる番号をつけた 7 個の玉が入っている。袋から玉を 1 個取り出し、玉の番号を調べて玉を袋に戻す。この試行を 3 回繰り返したとき、1 回目の玉の番号を a 、2 回目の玉の番号を b 、3 回目の玉の番号を c とする。 $a < b < c$ となる確率は カ である。 $a \times b \times c$ の値が偶数となる確率は $\frac{\text{キ}}{343}$ である。 $a + b + c$ の値が奇数となる確率は $\frac{\text{ク}}{343}$ である。2 以上 6 以下の自然数 k に対して、 $a + b = k$ かつ $c \leq 7 - k$ となる確率は $\frac{(7-k)}{343} (\text{ケ})$ であるので、 $a + b + c \leq 7$ となる確率は コ である。

〔Ⅱ〕 $f(x) = 11x - 9\sqrt{2}x^2$ とする。原点を O とする座標平面上に曲線 $C_1: y = f(x)$ と、直線 $\ell_1: y = x$ がある。次の問いに答えよ。

- (1) ℓ_1 上の点 $A(a, a)$ を通り ℓ_1 に垂直な直線 ℓ_2 が、 C_1 上の点 $B(b, f(b))$ で C_1 に接している。 a と b の値をそれぞれ求めよ。
- (2) (1) で求めた a と b の値を用いて、実数 t は $0 < t < \sqrt{2}a$ を満たすとし、曲線 $C_2: y = f(x)$ ($0 \leq x \leq b$) とする。第 1 象限にある ℓ_1 上の点 P が $OP = t$ であるとき、 P を通り ℓ_1 に垂直な直線と C_2 の交点を Q とする。 Q の x 座標を t を用いて表せ。
- (3) (1) で定まる ℓ_2 と (2) で定めた C_2 に対して、 ℓ_1 , ℓ_2 , C_2 で囲まれた部分を ℓ_1 のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

〔Ⅲ〕 座標平面上の円 $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$ とし、円 $C_2: x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ とする。点 A の座標を $(1, -2)$ とし、点 P は C_1 上に、点 Q は C_2 上にあるとする。また、

$$f = |\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}|^2 - |\overrightarrow{AP}|^2 - |\overrightarrow{AQ}|^2$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) P の座標を $(3, -1)$ とする。Q が C_2 上の点全体を動くとき、 f が最大となるときの Q の座標を求めよ。
- (2) P の座標が $(3, -1)$ のとき、直線 AP を考える。 C_2 上の点 R における C_2 の接線は直線 AP と垂直になるという。このときの R の座標をすべて求めよ。
- (3) P を定めたとき、Q が C_2 上の点全体を動くときの f の最大値を m とする。P が C_1 上の点全体を動くとき、 $m = 0$ となるような P の座標をすべて求めよ。

〔Ⅳ〕 次の条件によって定められる数列をそれぞれ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ とする。

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_1 = 1, b_2 = 2, b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$c_1 = 1, c_2 = 1, c_{n+2} = \frac{c_{n+1}(c_{n+1} + 1)}{c_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

- (1) $a_3 b_3$, $a_4 b_3$, $a_4 b_4$ の値を求めよ。
- (2) 次の等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。

$$a_n b_{n+1} = a_{n+1} b_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$a_{n+2} b_n = a_{n+1} b_{n+1} + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
- (3) n が 3 以上の自然数のとき、 c_n は整数であることを示せ。

以下余白

