

【Ⅰ】

〔解答〕

|     |              |                 |              |              |                 |
|-----|--------------|-----------------|--------------|--------------|-----------------|
| (1) | <div>ア</div> | <div>イ</div>    | <div>ウ</div> | <div>エ</div> | <div>オ</div>    |
|     | 36           | $\frac{\pi}{6}$ | 0            | 2            | $\frac{1}{3}$   |
| (2) | <div>カ</div> | <div>キ</div>    | <div>ク</div> | <div>ケ</div> | <div>コ</div>    |
|     | 2            | $\frac{1}{3}$   | 9            | 4            | $\frac{1}{k+2}$ |

〔解説〕

(1)

$$z=18\sqrt{3}+18i=36\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=36\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

であるので、

$$|z|=36,\theta=\frac{\pi}{6}$$

である。また

$$\gamma=\frac{1}{49}+\frac{\sqrt{3}}{49}i=\frac{2}{49}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{2}{49}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

であるので、

$$\begin{aligned}\gamma^7z&=\left(\frac{2}{49}\right)^7\left(\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}\right)\times 36\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\&=36\left(\frac{2}{49}\right)^7\left(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2}\right)\\&=39\left(\frac{2}{49}\right)^7i\end{aligned}$$

となる。よって、 $\gamma^7z$ の実部は0である。次に、 $a, b$ を実数として、 $w=a+bi$ とするとき

$$|w|^2=a^2+b^2$$

であるので、

$$|a|+|b|\leqslant\sqrt{m}|w|\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow(|a|+|b|)^2\leqslant m|w|^2\quad(\because|a|+|b|\geqslant 0)$$

$$\Leftrightarrow m\geqslant\frac{a^2+b^2+2|a||b|}{a^2+b^2}$$

となる。ここで、相加・相乗平均の関係式より、

$$a^2+b^2\geqslant 2\sqrt{a^2b^2}=2|a||b|$$

であり、等号は $a^2=b^2$ のときに成り立つ。これより

$$\frac{a^2+b^2+2|a||b|}{a^2+b^2}\leqslant 1+\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=2$$

であるから、すべての実数 $a, b$ に対して①を満たす最小の自然数 $m$ は2である。次に、

$$|\alpha|+|\beta|\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$$

において、自然数 $k=1\sim n$ に対し

$$\alpha=\frac{k^2i}{n(n+1)(n+2)},\beta=\frac{k\cos k-\sin k}{n(n+1)(n+2)}$$

とすると

$$\begin{aligned}-\left|\frac{k\cos k-\sin k}{n(n+1)(n+2)}\right|+\left|\frac{k^2i}{n(n+1)(n+2)}\right|&\leqslant\left|\frac{(k\cos k-\sin k)+k^2i}{n(n+1)(n+2)}\right|\\&\leqslant\left|\frac{k\cos k-\sin k}{n(n+1)(n+2)}\right|+\left|\frac{k^2i}{n(n+1)(n+2)}\right|\cdots\cdots\textcircled{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで

$$-1\leqslant\cos k\leqslant 1,\quad-1\leqslant\sin k\leqslant 1$$

より

$$\left|\frac{k\cos k-\sin k}{n(n+1)(n+2)}\right|\leqslant\frac{k+1}{n(n+1)(n+2)}$$

である。また、

$$\left|\frac{k^2i}{n(n+1)(n+2)}\right|=\frac{k^2}{n(n+1)(n+2)}$$

となるので、②において $k=1\sim n$ の和をとると

$$\sum_{k=1}^n\frac{k^2-(k+1)}{n(n+1)(n+2)}\leqslant\sum_{k=1}^n\left|\frac{(k\cos k-\sin k)+k^2i}{n(n+1)(n+2)}\right|\leqslant\sum_{k=1}^n\frac{k^2+k+1}{n(n+1)(n+2)}$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=1}^n\frac{k^2-(k+1)}{n(n+1)(n+2)}&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}-n}{n(n+1)(n+2)}\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n(n+2)}{3n(n+1)}\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=1}^n\frac{k^2+k+1}{n(n+1)(n+2)}&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}+n}{n(n+1)(n+2)}\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n^2+3n+5}{3(n+1)(n+2)}\\&=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

となるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=1}^n\left|\frac{(k\cos k-\sin k)+k^2i}{n(n+1)(n+2)}\right|=\frac{1}{3}$$

である。

(2)

$k=3$ のとき、すべての箱で玉の番号と箱の番号が異なるためには、 $(2, 3, 1)$ または $(3, 1, 2)$ という順に玉が出ればよいので、

$$N(3)=2, P(3)=\frac{2}{3!}=\frac{1}{3}$$

である。次に $k\geqslant 2$ として玉と箱が $k+2$ 個ずつのときを考える。なお、1の番号がついた箱を「箱1」などと表すことにする。箱1に入るのは玉2から玉 $k+2$ までの $k+1$ 個である。以下、箱1に玉2が入るときの場合の数を考える。

[1] 箱2に玉1が入るとき

「箱3から箱 $k+2$ 」に「玉3から玉 $k+2$ 」を、箱と玉の番号が一致することなく入れる場合の数であるので、 $N(k)$ 通り存在する。

[2] 箱2に玉1以外の玉が入るとき

「箱2から箱 $k+2$ 」に「玉1および玉3から玉 $k+2$ 」を、箱3以降で箱と玉の番号が一致することなく、かつ、箱2に玉1が入らないように入れる場合の数であるので、 $N(k+1)$ 通り存在する。

箱1に他の $k$ 個の玉が入るときも同様であるから

$$N(k+2)=(k+1)(N(k+1)+N(k))$$

と表すことができる。 $N(2)=1$ より

$$N(4)=3(N(2)+N(3))=9$$

$$N(5)=4(N(3)+N(4))$$

となる。また、

$$\begin{aligned}P(k+2)&=\frac{N(k+2)}{(k+2)!}\\&=\frac{(k+1)(N(k+1)+N(k))}{(k+2)!}\\&=\frac{k+1}{k+2}\frac{N(k+1)}{(k+1)!}+\frac{1}{k+2}\frac{N(k)}{k!}\\&=\frac{k+1}{k+2}P(k+1)+\frac{1}{k+2}P(k)\end{aligned}$$

である。

## 〔Ⅱ〕

(1)

$f(x) = xe^x$  のとき,

$$\frac{d}{dx}f(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}\{(1+x)e^x\} = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{d}{dx}f(x) = (1+x)e^x, \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x) = (2+x)e^x$$

(2)

$e^x > 0$  より

$$\frac{d}{dx}f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

であるから、 $f(x)$  の増減表は下図のようになる。

|                        |            |      |            |      |            |
|------------------------|------------|------|------------|------|------------|
| $x$                    | $\cdots$   | $-2$ | $\cdots$   | $-1$ | $\cdots$   |
| $\frac{d}{dx}f(x)$     | $-$        | $-$  | $-$        | $0$  | $+$        |
| $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ | $-$        | $0$  | $+$        | $+$  | $+$        |
| $f(x)$                 | $\searrow$ |      | $\searrow$ |      | $\nearrow$ |

したがって、 $x = -1$  で最小値  $f(-1) = -e^{-1}$  をとるから、

$$a = -1, f(a) = -e^{-1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = -1, f(a) = -e^{-1}$$

(3)

増減表より  $f(x)$  の変曲点の  $x$  座標は  $-2$  であり、 $f(-2) = -2e^{-2}$  である。よって、

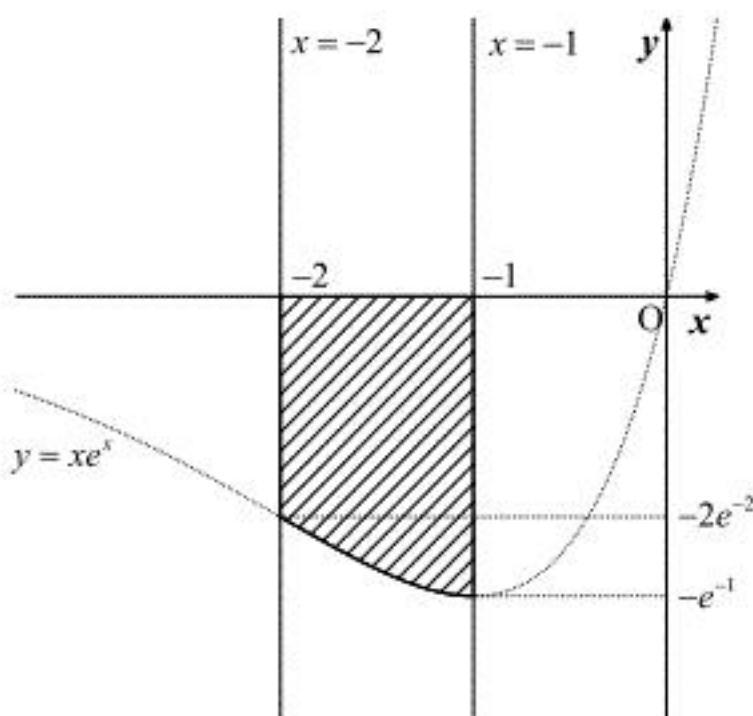
$$b = -2, f(b) = -2e^{-2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b = -2, f(b) = -2e^{-2}$$

(4)

$S$  は下図の斜線部分の面積である。



$-2 \leq x \leq -1$  において  $f(x) < 0$  であるから、求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-1} (-xe^x) dx \\ &= [-xe^x]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} (-e^x) dx \\ &= (e^{-1} - 2e^{-2}) + [e^x]_{-2}^{-1} \\ &= e^{-1} - 2e^{-2} + (e^{-1} - e^{-2}) \\ &= 2e^{-1} - 3e^{-2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = 2e^{-1} - 3e^{-2}$$

(5)

(4)の図の斜線部を  $x$  軸のまわりに1回転してできる立体の体積  $V$  は、

$$V = \pi \int_{-2}^{-1} (-xe^x)^2 dx = \pi \int_{-2}^{-1} x^2 e^{2x} dx$$

と表せる。ここで

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{2x} dx &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^{-1} x^2 e^{2x} dx \\ &= \pi \left[ \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} \right]_{-2}^{-1} \\ &= \pi \left\{ \left( \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{4} e^{-2} \right) - \left( 2e^{-4} + e^{-4} + \frac{1}{4} e^{-4} \right) \right\} \\ &= \pi \left( \frac{5}{4} e^{-2} - \frac{13}{4} e^{-4} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V = \pi \left( \frac{5}{4} e^{-2} - \frac{13}{4} e^{-4} \right)$$

【Ⅲ】

(1)

点Nは直線MA上にあるので、実数 $t$ を用いて、 $\overline{MN} = t\overline{MA}$ とおくことができる。これより、

$$\overline{MN} = t\overline{MA} = t(\overline{OA} - \overline{OM}) = t\{(1, 1, 1) - (0, 0, 2)\} = (t, t, -t)$$

と表せる。したがって、

$$\overline{ON} = \overline{OM} + \overline{MN} = (t, t, 2-t)$$

である。点Nは $xy$ 平面上にあるので、 $z$ 座標は0である。すなわち、

$$2-t=0 \Leftrightarrow t=2$$

が成り立つ。したがって、

$$\overline{ON} = (2, 2, 0)$$

となり、点Nの座標は $(2, 2, 0)$ とわかる。

(答)  $t=2$ ,  $N(2, 2, 0)$

(2)

点Qは直線PA上にあるので、実数 $s$ を用いて、 $\overline{PQ} = s\overline{PA}$ とおくことができる。これより、

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= s\overline{PA} \\ &= s(\overline{OA} - \overline{OP}) \\ &= s\{(1, 1, 1) - (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta, 2)\} \\ &= ((1-\sqrt{2}\cos\theta)s, (1-\sqrt{2}\sin\theta)s, -s)\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ} = ((1-\sqrt{2}\cos\theta)s + \sqrt{2}\cos\theta, (1-\sqrt{2}\sin\theta)s + \sqrt{2}\sin\theta, 2-s)$$

である。点Qの $z$ 座標は0であるから、

$$2-s=0 \Leftrightarrow s=2$$

が成立する。したがって、

$$\overline{OQ} = (2-\sqrt{2}\cos\theta, 2-\sqrt{2}\sin\theta, 0)$$

となり、点Qの座標は $(2-\sqrt{2}\cos\theta, 2-\sqrt{2}\sin\theta, 0)$ とわかる。

(答)  $Q(2-\sqrt{2}\cos\theta, 2-\sqrt{2}\sin\theta, 0)$

(3)

$\angle OQN$ が直角となるとき、 $\overline{OQ} \cdot \overline{QN} = 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\overline{OQ} \cdot \overline{QN} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{OQ} \cdot (\overline{ON} - \overline{OQ}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2-\sqrt{2}\cos\theta, 2-\sqrt{2}\sin\theta, 0) \cdot (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta, 0) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2-\sqrt{2}\cos\theta) \cdot \sqrt{2}\cos\theta + (2-\sqrt{2}\sin\theta) \cdot \sqrt{2}\sin\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2}(\sin\theta + \cos\theta) - 2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin\theta + \cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

が成立する。ここで、

$$0 \leq \theta < 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$$

であるから、

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$$

$$\therefore \theta = \frac{7}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi$$

である。

(答)  $\theta = \frac{7}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi$

(4)

点Qの座標は、 $(2-\sqrt{2}\cos\theta, 2-\sqrt{2}\sin\theta, 0)$ であるので、

$$x = 2-\sqrt{2}\cos\theta, y = 2-\sqrt{2}\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{2-x}{\sqrt{2}}, \sin\theta = \frac{2-y}{\sqrt{2}}$$

が成立する。いま $0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ 、 $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ であるので、

$$\begin{aligned}-1 \leq \frac{2-x}{\sqrt{2}} \leq 1 \quad \text{かつ} \quad -1 \leq \frac{2-y}{\sqrt{2}} \leq 1 \\ \Leftrightarrow 2-\sqrt{2} \leq x \leq 2+\sqrt{2} \quad \text{かつ} \quad 2-\sqrt{2} \leq y \leq 2+\sqrt{2} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。ここで、 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2-y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2-x}{\sqrt{2}}\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 &= 2 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

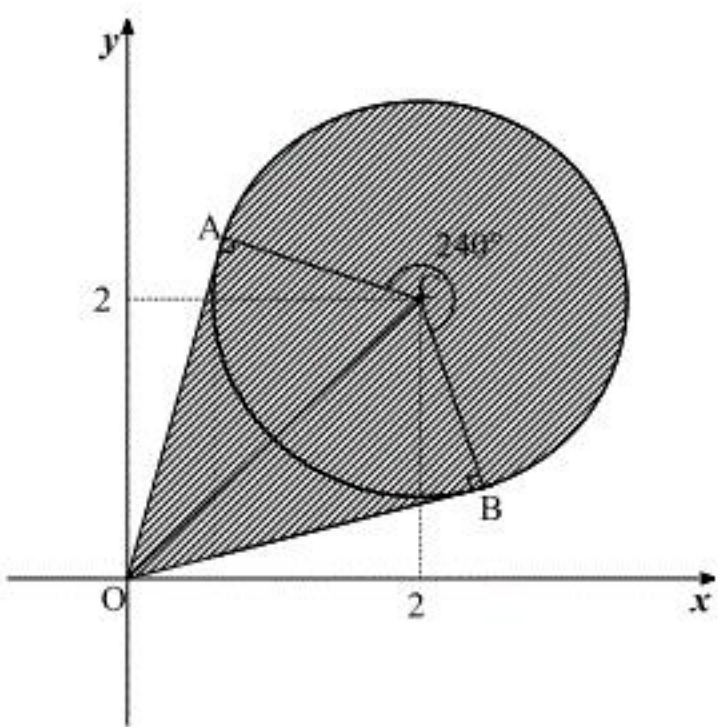
が成立する。いま $x$ と $y$ は①の範囲にあるので、求める軌跡は②の円全体である。よって、点

Qの軌跡は、円 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2, z=0$ とわかる。

(答) 円 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2, z=0$

(5)

(4)より、点Qの軌跡が円 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2, z=0$ であることから、線分OQが通過してできる図形は、平面 $z=0$ 上における下図の斜線部分である。



図のように、原点から円に引いた接線の2つの接点をA, B, 円の中心をCとすると

$$OC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = BC = \sqrt{2}$$

$$\angle OAC = \angle OBC = 90^\circ$$

であるから、

$$\angle OCA = \angle OCB = 60^\circ$$

$$OA = OB = \sqrt{6}$$

とわかる。よって、求める面積は $\triangle OAC$ 、 $\triangle OBC$ 、中心角 $240^\circ$ の扇形の面積の和であるから、

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} + \frac{2}{3} \pi (\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3} \pi$$

である。

(答)  $2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$

[IV]

- (1)  $n$  は 2 以上の整数であり、関数  $r(t), f(x)$  は次のように定義される。

$$r(t)=(t+1)\log\left(1+\frac{4}{t}\right) \quad (t>0)$$
$$f(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}-e^{-x} \quad (x\geq 0)$$

$\lim_{t\rightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$  より、対数をとって  $\lim_{t\rightarrow\infty}t\log\left(1+\frac{1}{t}\right)=1$  となる。したがって、求める極限は

$$\lim_{t\rightarrow\infty}r(t)=\lim_{t\rightarrow\infty}(t+1)\log\left(1+\frac{4}{t}\right)=4\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{t}{4}\log\left(1+\frac{4}{t}\right)+\lim_{t\rightarrow\infty}\log\left(1+\frac{4}{t}\right)=4\cdot 1+0=4$$

である。

(答)  $\lim_{t\rightarrow\infty}r(t)=4$

- (2)  $\frac{d}{dt}r(t), \frac{d^2}{dt^2}r(t)$  を順に計算すると、それぞれ

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}r(t)&=(t+1)'\log\left(1+\frac{4}{t}\right)+(t+1)\left\{\log\left(1+\frac{4}{t}\right)\right\}'\\&=\log\left(1+\frac{4}{t}\right)+(t+1)\frac{-\frac{4}{t^2}}{1+\frac{4}{t}}\\&=\log\left(1+\frac{4}{t}\right)-\frac{4(t+1)}{t(t+4)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}r(t)&=\left\{\log\left(1+\frac{4}{t}\right)\right\}'-\left\{\frac{4(t+1)}{t(t+4)}\right\}'\\&=-\frac{4}{t(t+4)}-\frac{4t(t+4)-4(t+1)(2t+4)}{\{t(t+4)\}^2}\\&=-\frac{4t(t+4)+4(t^2+4t)-4(2t^2+6t+4)}{\{t(t+4)\}^2}\\&=-\frac{8(t-2)}{\{t(t+4)\}^2}\end{aligned}$$

となる。

(答)  $\frac{d}{dt}r(t)=\log\left(1+\frac{4}{t}\right)-\frac{4(t+1)}{t(t+4)}, \frac{d^2}{dt^2}r(t)=-\frac{8(t-2)}{\{t(t+4)\}^2}$

- (3) (2)の結果より、関数  $r'(t)$  の  $t\geq 2$  における増減表は以下のようになる。

|          |         |            |
|----------|---------|------------|
| $t$      | 2       | ...        |
| $r''(t)$ | 0       | -          |
| $r'(t)$  | $r'(2)$ | $\searrow$ |

ここで、

$$\lim_{t\rightarrow\infty}r'(t)=\lim_{t\rightarrow\infty}\left\{\log\left(1+\frac{4}{t}\right)-\frac{4(t+1)}{t(t+4)}\right\}=\log(1+0)-0=0$$

であるから、 $t\geq 2$  の範囲で  $r'(t)>0$  であることがわかる。よって、関数  $r(t)$  の  $t\geq 2$  における増減表は以下のようになる。

|         |         |            |
|---------|---------|------------|
| $t$     | 2       | ...        |
| $r'(t)$ | $r'(2)$ | +          |
| $r(t)$  | $r(2)$  | $\nearrow$ |

ここで、(1)の結果より

$$\lim_{t\rightarrow\infty}r(t)=4$$

であるから、 $t\geq 2$  の範囲で  $r(t)<4$  であることがわかる。

(証明終)

- (4) 関数  $g(x)=(n+1)\log\left(1+\frac{x}{n}\right)-x$  ( $x\geq 0$ ) を微分すると

$$g'(x)=(n+1)\log\left(1+\frac{x}{n}\right)-x=(n+1)\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}}-1=\frac{n+1}{x+n}-1=-\frac{x-1}{x+n}$$

となるから、関数  $g(x)$  の  $x\geq 0$  における増減表は以下のようになる。

|         |         |            |        |            |
|---------|---------|------------|--------|------------|
| $x$     | 0       | ...        | 1      | ...        |
| $g'(x)$ | $g'(0)$ | +          | 0      | -          |
| $g(x)$  | $g(0)$  | $\nearrow$ | $g(1)$ | $\searrow$ |

ここで、

$$g(0)=(n+1)\log(1+0)-0=(n+1)\cdot 0-0=0$$

であるから、 $g(1)>0$  であることがわかる。

(証明終)

さらに、

$$g(4)=(n+1)\log\left(1+\frac{4}{n}\right)-4=r(n)-4$$

であり、 $n\geq 2$  であるから、(3)の結果より、 $g(4)<0$  であることがわかる。

(答)  $g(4)<0$

- (5) 関数  $f(x)$  を微分すると

$$f'(x)=-n\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-(n+1)}+e^{-x}=-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-(n+1)}+e^{-x}$$

となる。ここで、(4)における関数  $g(x)$  について

$$g(x)=(n+1)\log\left(1+\frac{x}{n}\right)-x\Leftrightarrow g(x)+x=\log\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}$$
$$\therefore e^{g(x)+x}=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}$$

と変形できるから、これを用いると導関数  $f'(x)$  は

$$f'(x)=-e^{-[g(x)+x]}+e^{-x}=\frac{e^{g(x)}-1}{e^{g(x)+x}}$$

と表せる。さらに、(4)の結果より、関数  $g(x)$  の増減表は以下のようになる。

|         |         |            |   |            |         |            |
|---------|---------|------------|---|------------|---------|------------|
| $x$     | 0       | ...        | 1 | ...        | 4       | ...        |
| $g'(x)$ | $g'(0)$ | +          | 0 | -          | $g'(4)$ | -          |
| $g(x)$  | 0       | $\nearrow$ | 正 | $\searrow$ | 負       | $\searrow$ |

よって、 $1<x<4$  の範囲に、ただ1つ  $g(x)=0$  を満たす実数  $x$  が存在する。この  $x$  の値を  $q_n$  とおく。このとき、

$$\begin{cases} 0<x<q_n \text{ のとき, } g(x)>0 \\ x=q_n \text{ のとき, } g(x)=0 \\ q_n<x \text{ のとき, } g(x)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<q_n \text{ のとき, } e^{g(x)}>1 \\ x=q_n \text{ のとき, } e^{g(x)}=1 \\ q_n<x \text{ のとき, } e^{g(x)}<1 \end{cases}$$

となるから、関数  $f(x)$  の増減表は以下のようになる。

|         |         |            |          |            |
|---------|---------|------------|----------|------------|
| $x$     | 0       | ...        | $q_n$    | ...        |
| $f'(x)$ | $f'(0)$ | +          | 0        | -          |
| $f(x)$  | $f(0)$  | $\nearrow$ | $f(q_n)$ | $\searrow$ |

よって、関数  $f(x)$  は  $x=q_n$  で最大となるから、 $p_n=q_n$  である。したがって、 $1<q_n<4$  であることから、 $1<p_n<4$  を満たすことがわかる。

(証明終)

- (6) (5)の  $p_n$  に対して、 $\lim_{n\rightarrow\infty}f(p_n)=0$  であることを示す。まず、極限  $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n}{p_n}\log\left(1+\frac{p_n}{n}\right)$  について、

$$t=\frac{n}{p_n} \text{ とおくと, } 1<p_n<4 \text{ から } t>\frac{n}{4} \text{ より, } n\rightarrow\infty \text{ のとき } t\rightarrow\infty \text{ であるから}$$

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{n}{p_n}\log\left(1+\frac{p_n}{n}\right)=\lim_{t\rightarrow\infty}t\log\left(1+\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\rightarrow\infty}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\log e=1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と求まる。よって、①より、 $n\rightarrow\infty$  のとき

$$\left|\frac{n}{p_n}\log\left(1+\frac{p_n}{n}\right)-1\right|\rightarrow 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。また、②を用いると、 $n\rightarrow\infty$  のとき

$$\left|-p_n\left\{\frac{n}{p_n}\log\left(1+\frac{p_n}{n}\right)-1\right\}\right|=p_n\left|\frac{n}{p_n}\log\left(1+\frac{p_n}{n}\right)-1\right|\leq 4\left|\frac{n}{p_n}\log\left(1+\frac{p_n}{n}\right)-1\right|\rightarrow 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となるから、③より、はさみうちの原理を利用して

$$\lim_{n\rightarrow\infty}-p_n\left\{\frac{n}{p_n}\log\left(1+\frac{p_n}{n}\right)-1\right\}=0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

と求まる。したがって、④より、 $n\rightarrow\infty$  のとき

$$\left(1+\frac{p_n}{n}\right)^{-n}e^{-p_n}=e^{\log\left(1+\frac{p_n}{n}\right)^{-n}\cdot p_n}=e^{-n\log\left(1+\frac{p_n}{n}\right)\cdot p_n}=e^{-p_n\left\{\frac{n}{p_n}\log\left(1+\frac{p_n}{n}\right)-1\right\}}\rightarrow e^0(=1) \quad \cdots \textcircled{5}$$

が成り立つ。さらに、⑤を用いると、 $n\rightarrow\infty$  のとき

$$\left|e^{-p_n}\left\{\left(1+\frac{p_n}{n}\right)^{-n}e^{-p_n}-1\right\}\right|=e^{-p_n}\left|\left(1+\frac{p_n}{n}\right)^{-n}e^{-p_n}-1\right|\leq e^{-1}\left|\left(1+\frac{p_n}{n}\right)^{-n}e^{-p_n}-1\right|\rightarrow 0 \quad \cdots \textcircled{6}$$

となるから、⑥より、はさみうちの原理を利用して

$$\lim_{n\rightarrow\infty}f(p_n)=\lim_{n\rightarrow\infty}\left\{\left(1+\frac{p_n}{n}\right)^{-n}-e^{-p_n}\right\}=\lim_{n\rightarrow\infty}e^{-p_n}\left\{\left(1+\frac{p_n}{n}\right)^{-n}e^{-p_n}-1\right\}=0$$

と求まる。

(証明終)