

【Ⅰ】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	$2px-p^2+1$	$-\frac{1}{p}$	$\frac{1}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right)$	$\frac{1}{12}\left(p+\frac{1}{p}\right)^3$	1
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	18	3	$2+\sqrt{5}$	4	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【解説】

(1)

$y=x^2+1$ のとき $y'=2x$ である。よって、点 $P(p, p^2+1)$ における放物線 C の接線 l_1 の式は、

$$y=2p(x-p)+p^2+1 \Leftrightarrow y=2px-p^2+1$$

となる。同様にして、接線 l_2 の式は、

$$y=2qx-q^2+1$$

である。接線 l_1, l_2 の交点 R の x 座標は

$$2px-p^2+1=2qx-q^2+1$$

$$\Leftrightarrow 2(p-q)x=(p+q)(p-q)$$

$$\therefore x=\frac{p+q}{2} \quad (\because p>0, q<0 \text{ より } p-q \neq 0)$$

であるから、 R の y 座標が 0 となるとき

$$2p \cdot \frac{p+q}{2} - p^2 + 1 = 0$$

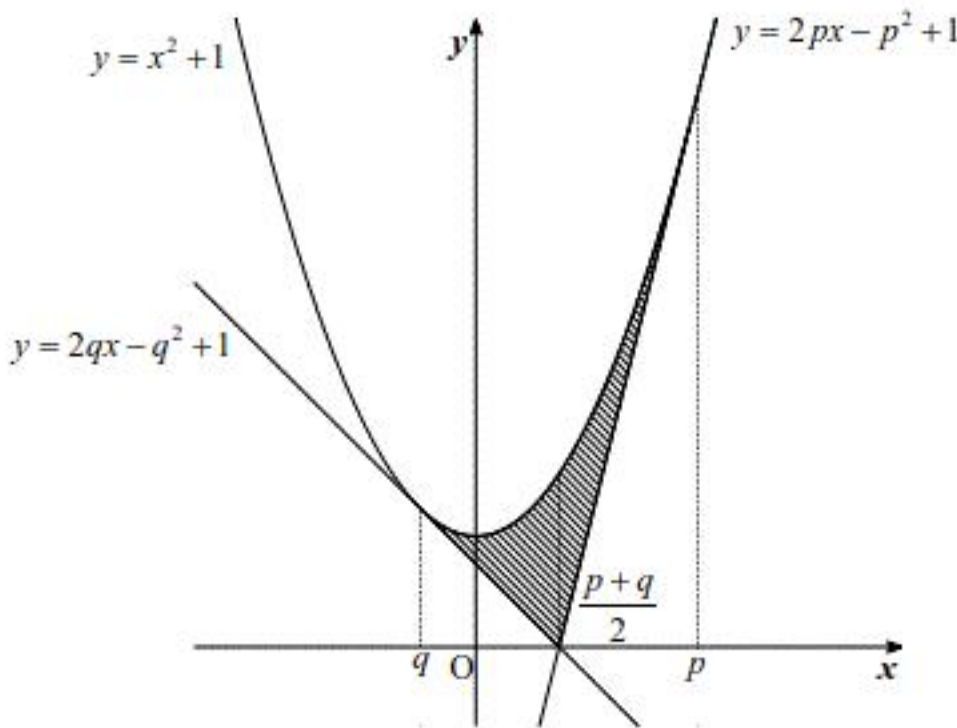
$$\Leftrightarrow pq+1=0$$

$$\therefore q=-\frac{1}{p}$$

と表せる。このとき R の x 座標は

$$\frac{p+q}{2} = \frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{p} \right)$$

である。また、放物線 C と l_1, l_2 で囲まれた部分は下図の斜線部分である。



したがって、

$$\begin{aligned} S &= \int_q^{\frac{p+q}{2}} \left\{ (x^2+1) - (2qx-q^2+1) \right\} dx + \int_{\frac{p+q}{2}}^p \left\{ (x^2+1) - (2px-p^2+1) \right\} dx \\ &= \int_q^{\frac{p+q}{2}} (x-q)^2 dx + \int_{\frac{p+q}{2}}^p (x-p)^2 dx \\ &= \left[\frac{(x-q)^3}{3} \right]_q^{\frac{p+q}{2}} + \left[\frac{(x-p)^3}{3} \right]_{\frac{p+q}{2}}^p \\ &= \frac{(p-q)^3}{24} + \frac{(p-q)^3}{24} \\ &= \frac{1}{12} \left(p + \frac{1}{p} \right)^3 \end{aligned}$$

となる。 $p>0$ であるから、相加・相乗平均の関係より、

$$p + \frac{1}{p} \geq 2\sqrt{p \times \frac{1}{p}} = 2$$

となることを用いると、

$$S = \frac{1}{12} \left(p + \frac{1}{p} \right)^3 \geq \frac{1}{12} \times 2^3 = \frac{2}{3}$$

が成り立つ。したがって、この不等式の等号が成立するとき、すなわち、

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{p} \\ \therefore p &= 1 \quad (\because p>0) \end{aligned}$$

のとき、面積 S は最小になる。

(2)

$\alpha = \log_{18} 972$ のとき、

$$a_1 = \alpha = \log_{18} (3 \times 18^2) = 2 + \log_{18} 3$$

となる。よって、

$$b_1 = [2 + \log_{18} 3] = 2 \quad (\because 0 < \log_{18} 3 < 1)$$

である。また、

$$a_2 = \frac{1}{a_1 - b_1} = \frac{1}{(2 + \log_{18} 3) - 2} = \frac{1}{\log_{18} 3} = \log_3 18 = 2 + \log_3 2$$

より、

$$3^{a_2} = 3^{\log_3 18} = 18$$

と求まる。また、

$$b_2 = [2 + \log_3 2] = 2 \quad (\because 0 < \log_3 2 < 1)$$

となるから、

$$a_3 = \frac{1}{a_2 - b_2} = \frac{1}{(2 + \log_3 2) - 2} = \frac{1}{\log_3 2} = \log_2 3$$

となる。よって、

$$2^{a_3} = 2^{\log_2 3} = 3$$

と求まる。 $\alpha = \sqrt{5}$ のとき、 $a_1 = \sqrt{5}$ より、

$$b_1 = [\sqrt{5}] = 2 \quad (\because 2 < \sqrt{5} < 3)$$

となる。よって、

$$a_2 = \frac{1}{a_1 - b_1} = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \sqrt{5} + 2$$

となる。また、

$$b_2 = [\sqrt{5} + 2] = 4$$

となるから、

$$a_3 = \frac{1}{a_2 - b_2} = \frac{1}{(\sqrt{5} + 2) - 4} = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{5} + 2$$

となる。 a_n の値が定まれば b_n, a_{n+1} の値も一意に定まるから、 $a_2 = a_3$ より、 $n \geq 2$ のとき、 a_n, b_n は一定値

$$\begin{aligned} a_n &= a_2 = 2 + \sqrt{5} \\ b_n &= b_2 = 4 \end{aligned}$$

をとることがわかる。また、 $a_1 = \alpha$ であり、1 以上の自然数 n に対して $b_n = 1$ となるとき、

$$b_1 = [\alpha] = 1 \Leftrightarrow 1 \leq \alpha < 2$$

である。ここで、 $a_n = \alpha$ とすると

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\alpha - 1} \\ \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 &= 0 \end{aligned}$$

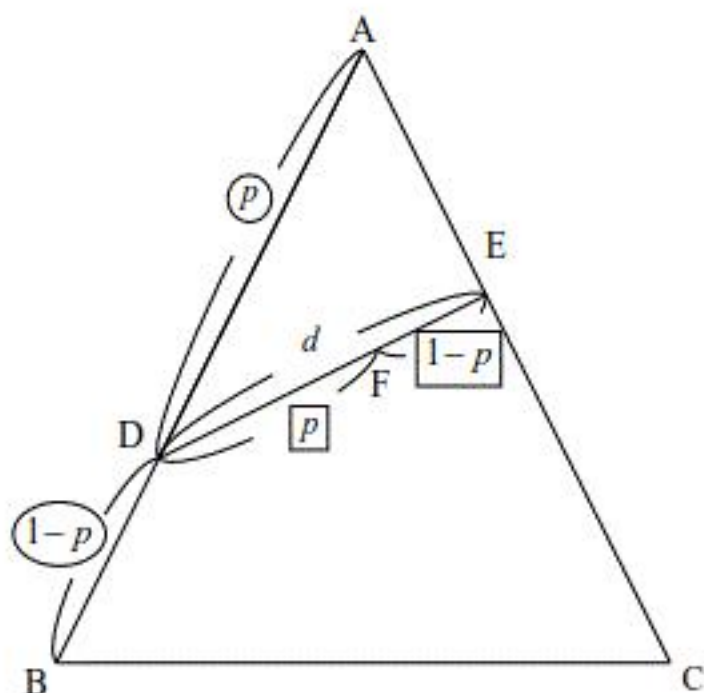
$$\therefore \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because 1 \leq \alpha < 2)$$

であり、このとき

$$b_n = [\alpha] = 1$$

となる。

〔Ⅱ〕



(1)

点Fは線分DEを $p:(1-p)$ に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{CF} = (1-p)\overrightarrow{CD} + p\overrightarrow{CE}$$

と表せる。

(答) $\overrightarrow{CF} = (1-p)\overrightarrow{CD} + p\overrightarrow{CE}$

(2)

$\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{CE}$ より、 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{DE} &= \{(1-p)\overrightarrow{CD} + p\overrightarrow{CE}\} \cdot \overrightarrow{DE} \\ &= (1-p)\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED}$ より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{DE} &= (1-p)(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED}) \cdot \overrightarrow{DE} \\ &= (p-1)|\overrightarrow{DE}|^2 \\ &= (p-1)d^2\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{DE} = (p-1)d^2$

(3)

$$\begin{aligned}G &= \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DB} \\ &= (\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{DB} \\ &= p\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{DB} = \frac{1-p}{p}\overrightarrow{AD} = \frac{1-p}{p}(\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EA})$ であるから、 $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{EA}$ に注意すると、

$$\begin{aligned}G &= p\overrightarrow{DE} \cdot \frac{1-p}{p}(\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EA}) \\ &= (p-1)|\overrightarrow{DE}|^2 \\ &= (p-1)d^2\end{aligned}$$

となる。

(答) $G = (p-1)d^2$

(4)

直線BEと直線CFが垂直に交わる時、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CF} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DB}) \cdot \overrightarrow{CF} &= 0 \\ \therefore \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CF}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{DE} = (p-1)d^2$ であることと、上式を用いると、

$$\begin{aligned}G &= \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DB} \\ &= (p-1)d^2 - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

となる。(3)より、 $G = (p-1)d^2$ であるから、

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

である。 $|\overrightarrow{CD}| \neq 0, |\overrightarrow{DB}| \neq 0$ より、直線ABと直線CDは垂直に交わることがわかる。

(証明終)

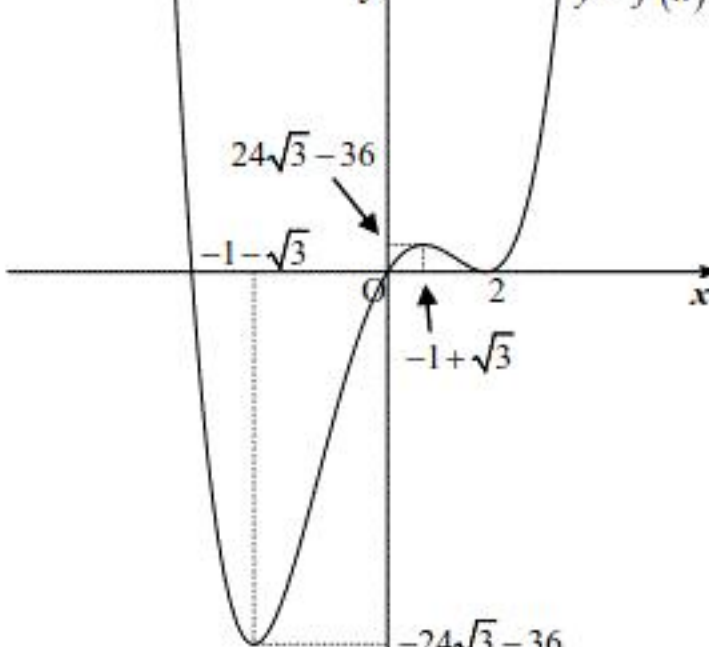
〔Ⅲ〕

(1)

$p=q=4$ のとき、
$$f(x)=x^4-12x^2+16x$$
$$f'(x)=4x^3-24x+16=4(x-2)(x^2+2x-2)$$
となるので、 $f'(x)=0$ となるのは $x=2, -1\pm\sqrt{3}$ のときである。増減表をかくと、

x	...	$-1-\sqrt{3}$	...	$-1+\sqrt{3}$	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

となる。ここで、 $x=-1\pm\sqrt{3}$ のとき、 $x^2=2-2x$ であるので、
$$\begin{aligned}x^4-12x^2+16 &= (2-2x)^2-12(2-2x)+16x \\&= 4(2-2x)-8x+4-24+24x+16x \\&= 24x-12\end{aligned}$$
となる。ゆえに、
$$\begin{aligned}f(-1+\sqrt{3}) &= 24(-1+\sqrt{3})-12=24\sqrt{3}-36 \\f(-1-\sqrt{3}) &= 24(-1-\sqrt{3})-12=-24\sqrt{3}-36\end{aligned}$$
である。よって、 $y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



(答) 前図

(2)

α, β, γ はそれぞれ $f'(x)=0$ の解なので、
$$f'(\alpha)=f'(\beta)=f'(\gamma)=0$$
が成り立つ。また
$$f'(\alpha)=4\alpha^3-6p\alpha+4q=0$$
であるから、
$$\alpha^3=\frac{3}{2}p\alpha-q$$
である。ゆえに、
$$\begin{aligned}g(\alpha) &= f(\alpha) \\&= \alpha\left(\frac{3}{2}p\alpha-q\right)-3p\alpha^2+4q\alpha \\&= -\frac{3}{2}p\alpha^2+3q\alpha\end{aligned}$$
となる。同様にして、
$$\begin{aligned}g(\beta) &= -\frac{3}{2}p\beta^2+3q\beta \\g(\gamma) &= -\frac{3}{2}p\gamma^2+3q\gamma\end{aligned}$$
である。ここで、 $g(x)=-\frac{3}{2}px^2+3qx$ とすると、3 点 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta)), (\gamma, f(\gamma))$ は $y=g(x)$ 上にある。3 点を通る 2 次関数は 1 つに定まることから、これが求める関数であることがわかる。

(答) $g(x)=-\frac{3}{2}px^2+3qx$

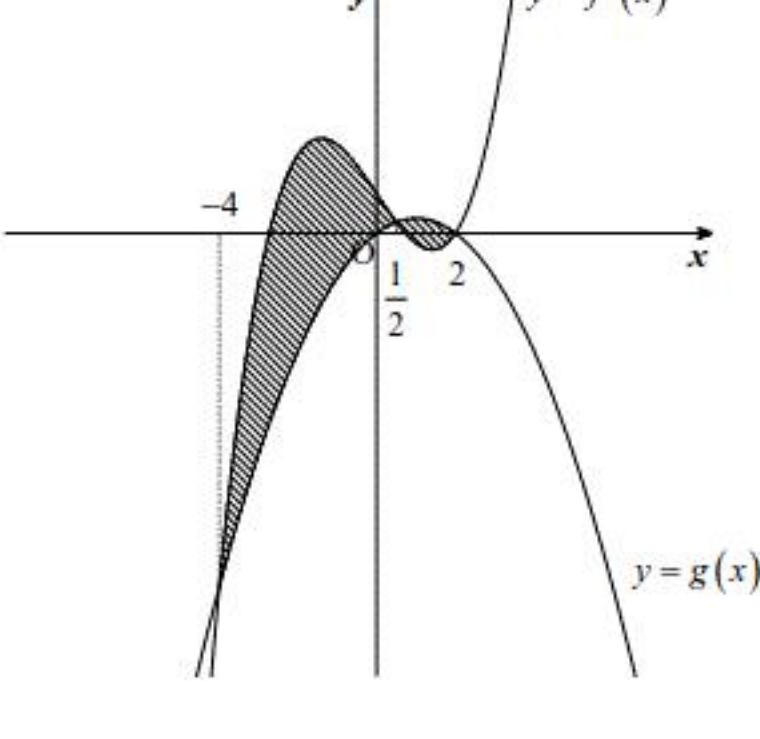
(3)

$f(\gamma)=0 \Leftrightarrow g(\gamma)=0$ であるから
$$-\frac{3}{2}p\gamma^2+3q\gamma=0$$
となる。ここで、 $p^3>2q^2$ より $p>0$ である。また、 $f'(x)=4x^3-6px+4q=0$ の解が α, β, γ であるので、解と係数の関係より、
$$\alpha+\beta+\gamma=0$$
である。ここで、 $\gamma\leq 0$ とすると、 $\alpha<\beta<\gamma$ より $\alpha+\beta+\gamma<0$ となるから $\gamma>0$ である。よって、
$$-\frac{3}{2}p\gamma^2+3q\gamma=0 \Leftrightarrow \gamma=\frac{2q}{p}$$
となり、
$$\begin{aligned}f\left(\frac{2q}{p}\right) &= 0 \\&\Leftrightarrow \frac{2q}{p}\left(\frac{8q^3}{p^3}-6q+4q\right)=0 \\&\Leftrightarrow \frac{4q^2}{p^4}(4q^2-p^3)=0\end{aligned}$$
が成り立つ。ここで、 $\gamma=\frac{2q}{p}>0, p>0$ より、 $q>0$ であるので、
$$q=\sqrt{\frac{p^3}{4}}=\frac{p\sqrt{p}}{2}$$
となり、
$$\gamma=\frac{2\cdot\frac{p\sqrt{p}}{2}}{p}=\sqrt{p}$$
である。また、 $f'(x)=4x^3-6px+4q=0$ において、解と係数の関係から
$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha\beta\gamma=-q\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=-\sqrt{p} \\ \alpha\beta=-\frac{p}{2}\end{cases}$$
が成り立つ。よって、 α, β は 2 次方程式 $t^2+\sqrt{p}t-\frac{p}{2}=0$ の解であり、 $\alpha<\beta$ であることから
$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{-\sqrt{p}-\sqrt{3p}}{2} = -\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{p}}{2} \\ \beta &= \frac{-\sqrt{p}+\sqrt{3p}}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{p}}{2}\end{aligned}$$
と求まる。

(答) $q=\frac{p\sqrt{p}}{2}, \alpha=-\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{p}}{2}, \beta=\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{p}}{2}, \gamma=\sqrt{p}$

(4)

$p=4, f(\gamma)=0$ のとき、(3)より、
$$q=4, \alpha=-\sqrt{3}-1, \beta=\sqrt{3}-1, \gamma=2$$
であるから
$$f'(x)=4x^3-24x+16$$
である。また、(2)より、
$$g(x)=-6x^2+12x$$
となる。
$$\begin{aligned}f'(x)-g(x) &= 4x^3+6x^2-36x+16 \\&= 2(x-2)(2x^2+7x-4) \\&= 2(x-2)(2x-1)(x+4)\end{aligned}$$
であるから、 $f'(x)-g(x)=0$ となるのは、 $x=\frac{1}{2}, 2, -4$ のときであり、 $y=f'(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは下図のようにかける。



求める面積 S は斜線部分の面積であるから、
$$\begin{aligned}S &= \int_{-4}^{\frac{1}{2}} \{f'(x)-g(x)\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \{g(x)-f'(x)\} dx \\&= \int_{-4}^{\frac{1}{2}} (4x^3+6x^2-36x+16) dx - \int_{\frac{1}{2}}^2 (4x^3+6x^2-36x+16) dx \\&= \left[x^4+2x^3-18x^2+16x\right]_{-4}^{\frac{1}{2}} - \left[x^4+2x^3-18x^2+16x\right]_{\frac{1}{2}}^2 \\&= \left(\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-\frac{9}{2}+8\right) - (256-128-288-64) - (16+16-72+32) + \left(\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-\frac{9}{2}+8\right) \\&= \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+7\right) - (-224) - (-8) \\&= \frac{1917}{8}\end{aligned}$$
となる。

(答) $S=\frac{1917}{8}$