

2018年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)のそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 氏名の記入欄は、解答用紙(一)、(二)の表面にそれぞれ1か所ある。合計2か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (4) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (5) 問題紙の本文は2ページである。
- (6) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (7) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (8) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (9) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

余白

〔Ⅰ〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

- (1) i を虚数単位とする。複素数 $z = 18\sqrt{3} + 18i$ のとき、 z の絶対値 $|z| =$ ア , z の偏角を θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とすると $\theta =$ イ . 複素数 $\gamma = \frac{1}{49} + \frac{\sqrt{3}}{49}i$ とすると、 $\gamma^7 z$ の実部は ウ . 次に、 a, b を実数とし、複素数 $w = a + bi$ とする。実数 a, b のどのような値に対しても、不等式 $|a| + |b| \leq \sqrt{m} |w|$ が成り立つような自然数 m のうち最小のものは エ . 複素数 α, β に対する不等式 $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ を用いると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left| \frac{(k \cos k - \sin k) + k^2 i}{n(n+1)(n+2)} \right| =$$
 オ .

- (2) k を 3 以上の整数とする。1 から k までの番号を 1 つずつつけた k 個の玉と、同様に番号をつけた k 個の箱を用意する。この k 個の玉を 1 つの袋に入れ、この袋から玉を 1 個ずつ取り出して番号が 1 の箱から順に 1 個ずつすべての箱に入れていく。このとき、袋から一度取り出した玉は袋に戻さないとする。すべての箱で玉の番号と箱の番号が異なる事象を考える。この事象の起こる場合の数を $N(k)$ とし、この事象が起こる確率を $P(k)$ とすると、 $N(3) =$ カ , $P(3) =$ キ . また、 $N(4) =$ ク であり、 $N(5) =$ ケ $\times (N(4) + N(3))$ であるので、一般の k のときの確率の関係式は $P(k+2) = \frac{k+1}{k+2} P(k+1) +$ コ $P(k)$.

〔Ⅱ〕 関数 $f(x) = xe^x$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ を求めよ。
 (2) 関数 $f(x)$ は $x = a$ で最小値 $f(a)$ をとるとする。 $a, f(a)$ を求めよ。
 (3) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点を $(b, f(b))$ とする。 $b, f(b)$ を求めよ。
 (4) (2) の a と (3) の b に対して、曲線 $y = f(x)$ のうちで 2 点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ の間の部分を C とする。曲線 C と直線 $x = a$, $x = b$ および x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。 S を求めよ。
 (5) (4) の囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V とする。 V を求めよ。

〔Ⅲ〕 O を原点とする座標空間内の 2 点 $M(0, 0, 2)$, $A(1, 1, 1)$ を考える. 実数 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たすとする. 点 M を中心とする平面 $z = 2$ 上の半径 $\sqrt{2}$ の円を S とし, 円 S 上の点 P の座標を $(\sqrt{2} \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta, 2)$ とする. 直線 MA と xy 平面の交点を N とし, 直線 PA と xy 平面の交点を Q とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $\overrightarrow{MN} = t\overrightarrow{MA}$ となる実数 t を求め, 点 N の座標を求めよ.
- (2) 点 Q の座標を θ を用いて表せ.
- (3) $\angle OQN$ が直角となる θ の値を求めよ.
- (4) 点 P が円 S 上を動くとき, 点 Q の軌跡を求めよ.
- (5) 点 P が円 S 上を動くとき, 線分 OQ が通過してできる図形の面積を求めよ.

〔Ⅳ〕 n を 2 以上の整数とする. 関数 $r(t)$, $f(x)$ を次のように定める.

$$r(t) = (t+1) \log \left(1 + \frac{4}{t}\right) \quad (t > 0)$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} - e^{-x} \quad (x \geq 0)$$

次の問いに答えよ.

- (1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$ を用いて $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t)$ を求めよ.
- (2) $\frac{d}{dt}r(t)$, $\frac{d^2}{dt^2}r(t)$ を求めよ.
- (3) $t \geq 2$ のとき, 関数 $r(t)$ の増減を調べることにより, $r(t) < 4$ であることを示せ.
- (4) $g(x) = (n+1) \log \left(1 + \frac{x}{n}\right) - x$ ($x \geq 0$) とする. 関数 $g(x)$ の増減を調べることにより, $g(1) > 0$ であることを示せ. さらに, 関数 $r(t)$ を用いることにより, $g(4)$ が正であるか負であるかを理由をつけて述べよ.
- (5) 関数 $f(x)$ が最大値をとるときの x の値を p_n とする. p_n は $1 < p_n < 4$ を満たすことを示せ.
- (6) (5) の p_n に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = 0$ であることを示せ.

以下余白

