

2019年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)のそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 氏名の記入欄は、解答用紙(一)、(二)の表面にそれぞれ1か所ある。合計2か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (4) 解答はすべて解答用紙の所定の箇所に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (5) 問題紙の本文は2ページである。
- (6) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (7) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (8) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (9) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

余白

〔 I 〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

- (1) 座標平面上の楕円 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ と直線 $y = -x - 1$ の2つの共有点を $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$) とする。このとき, $x_1 =$ ア であり, 線分 AB の長さは イ である。2点 A, B と異なる楕円上の点 C を考える。これら3点を頂点とする $\triangle ABC$ の面積が最大となるのは点 C の座標が (ウ , エ) のときであり, このとき $\triangle ABC$ の面積は オ である。
- (2) A, B, C の3つの袋のどれにも20個の白玉と10個の黒玉が入っている。袋 A に対しては, 玉を1個取り出して, 取り出した玉が白であればその玉を袋 A に戻し, 取り出した玉が黒であればその玉は戻さずに別に用意された新たな白玉を1個袋 A に入れるという試行を行う。この試行を繰り返すとき, 袋 A の中の白玉が初めて22個になるのが3回目の試行終了時である確率は カ である。袋 B に対しては, 玉を2個同時に取り出す。このとき, 白玉と黒玉が1個ずつである確率は キ , 2個とも黒玉である確率は ク である。袋 C に対しては, 10個の玉を同時に取り出す。このとき, この10個の玉の中に黒玉が n 個入っている確率を P_n とすると, $0 \leq k \leq 9$ である整数 k に対して $\frac{P_{k+1}}{P_k} =$ ケ であり, P_n が最大値をとるのは $n =$ コ のときである。

〔 II 〕 実数 p, q, r を係数とする3次方程式 $z^3 + pz^2 + qz + r = 0$ は, 複素数の範囲で解を考えたとき, 互いに異なる3つの解 $\alpha, \beta, 1$ をもつとする。このとき, 複素数平面上で3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(1)$ を考え, 線分 AB の中点を表す複素数を ω とする。次の問いに答えよ。

- (1) p, q, r をそれぞれ α, β を用いて表せ。また, ω の虚部の値を求めよ。
- (2) 3点 A, B, C が虚軸に平行な1つの直線上に並ぶための p, q の条件を求めよ。
- (3) 3点 A, B, C を頂点とする $\triangle ABC$ が正三角形となるとき, r のとりうる値の範囲を求めよ。

〔Ⅲ〕 放物線 $C: y = 2x^2$ 上の異なる 2 点 $P(p, 2p^2)$, $Q(q, 2q^2)$ は条件 $PQ = 1$ を満たしている. 線分 PQ の中点の x, y 座標をそれぞれ X, Y とする. 次の問いに答えよ.

- (1) X, Y をそれぞれ p, q を用いて表せ.
- (2) 条件 $PQ = 1$ を用いて, $\frac{1}{(p-q)^2}$ を X の 2 次式で表せ.
- (3) 等式 $2(p^2 + q^2) = (p+q)^2 + (p-q)^2$ を用いて, Y を X で表せ.
また, Y の最小値を求めよ.
- (4) $p < q$ とする. 線分 PQ と放物線 C で囲まれた図形を D とする. 点 P, Q が条件 $PQ = 1$ を満たしながら放物線 C 上を動くとき, 図形 D の面積の最大値を求めよ. また, そのときの 2 点 P, Q の座標を求めよ.

〔Ⅳ〕 n を自然数とし, $f(x) = x \log x$ ($x > 0$) とする. 初項 $a_1 = 1$ の数列 $\{a_n\}$ を次の 2 つの条件を満たすように定める.

- 不等式 $a_n < a_{n+1}$ が成り立つ.
- 座標平面上の 2 点 $P_n(a_n, f(a_n))$, $P_{n+1}(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$ と原点 O を結んだ線分 OP_n , OP_{n+1} および曲線 $y = f(x)$ ($a_n \leq x \leq a_{n+1}$) で囲まれる部分の面積は n^2 である.

次の問いに答えよ.

- (1) 関数 $y = f(x)$ ($x > 0$) に対して, y の増減とグラフの凹凸を調べ, 極値を求めよ.
- (2) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ.
- (3) $(a_n)^2$ を n について降べきの順に整理した n の整式で求めよ.
- (4) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^3}$ を求めよ.
- (5) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{5}{2}} \sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ.

以下余白

