

2019年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)のそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 氏名の記入欄は、解答用紙(一)、(二)の表面にそれぞれ1か所ある。合計2か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (4) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (5) 問題紙の本文は2ページである。
- (6) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (7) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (8) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (9) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

余 白

余白

〔 I 〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

- (1) 座標空間内の xy 平面上に 3 点 $A(5, 5, 0)$, $B(0, 10, 0)$, $C(-4, 2, 0)$ がある。このとき、 $\triangle ABC$ の面積は ア であり、 $\triangle ABC$ の外接円の半径は イ である。次に、 θ を実数として、点 $D(10\sqrt{2}\cos^2\theta - 5\sqrt{2} - 9, 5\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta - \frac{1}{2}, 5)$ とおく。点 D の x 座標は $\cos 2\theta$ を用いて ウ と表すことができる。四面体 $ABCD$ において $AB \perp CD$ が成り立つような θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲に全部で エ 個存在する。特に、その中で $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす θ を θ_0 とおくと、 $\theta_0 =$ オ である。

- (2) 2 つの正の実数 α, β は条件 $\alpha + \beta < 1$ を満たすとする。金貨と銀貨が 1 枚ずつあり、投げたとき表が出る確率が金貨は α 、銀貨は β とする。この 2 枚の硬貨から 1 枚を選んで投げる試行を繰り返す。ただし、この試行において、表が出たときは次の試行では同じ硬貨を選び、裏が出たときは別の硬貨を選ぶものとする。 n 回目の試行において、金貨が選ばれる確率を p_n 、選ばれる硬貨に関わらず表が出る確率を q_n とし、 $p_1 = t$ ($0 < t < 1$) とする。このとき、 $q_1 =$ カ , $p_2 =$ キ , $p_{n+1} =$ (ク) $p_n + 1 - \beta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{\text{ケ}}{2 - \alpha - \beta}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{\text{コ}}{2 - \alpha - \beta}$ である。

〔 II 〕 e を自然対数の底とし、実数 a は $0 < a < \frac{1}{e}$ を満たすとする。関数 $f(x) = xe^{-x}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $x > 0$ のとき、不等式 $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ。
- (2) 方程式 $f(x) = a$ が異なる 2 つの正の実数解をもつことを示せ。
- (3) 不定積分 $\int \{f(x)\}^2 dx$ を求めよ。
- (4) (2) の 2 つの正の実数解を p, q ($p < q$) とする。2 直線 $x = p$, $x = q$ と曲線 $y = f(x)$ ($p \leq x \leq q$) および x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。極限 $\lim_{a \rightarrow +0} V$ を求めよ。

〔Ⅲ〕座標平面上の曲線 $(x-y)^2 - 2(x+y) = 0$ を C とする．次の問いに答えよ．

- (1) 関数 $f(t) = \log(t + \sqrt{t^2 + 1})$ に対して，導関数 $\frac{d}{dt}f(t)$ を求めよ．
- (2) 等式 $\frac{d}{dt}(t\sqrt{t^2 + 1}) = a\sqrt{t^2 + 1} - \frac{b}{\sqrt{t^2 + 1}}$ が成り立つように，定数 a, b の値を定めよ．また，不定積分 $\int \sqrt{t^2 + 1} dt$ を求めよ．
- (3) 曲線 C 上の点 (x, y) に対して， $x - y = t$ において， x と y をそれぞれ t で表せ．
- (4) 曲線 C 上の点のうち， x 座標の値が最小である点を P ， y 座標の値が最小である点を Q とする．2 点 P, Q の座標をそれぞれ求めよ．
- (5) 曲線 C のうち，(4) の 2 点 P と Q の間の部分を D とする．曲線 D の長さを求めよ．

〔Ⅳ〕 x, y を整数， n を自然数， i を虚数単位とする． x, y が整数全体を動くとき， $(1+2i)(x+yi)$ と表される複素数全体の集合である無限集合を L とする．さらに， L の要素のうち，実部と虚部がともに 0 以上かつ n 以下であるものの個数を m_n とする．次の問いに答えよ．

- (1) $(1+2i)(x_1+y_1i) = 5$ ， $(1+2i)(x_2+y_2i) = 5i$ を満たす整数 x_1, y_1, x_2, y_2 を求めよ．
- (2) s, t が実数のとき， $(1+2i)(s+ti)$ の実部と虚部がともに 0 以上かつ 5 以下となるための s, t の条件を求めよ．
- (3) m_5 を求めよ．また， $(1+2i)(x+yi)$ の実部と虚部がともに 1 以上かつ 4 以下となるような整数 x, y の値の組 (x, y) をすべて求めよ．
- (4) z を複素数とする． $\frac{z}{1+2i}$ の実部と虚部に注目して， z が L の要素であるとき， $z+5, z+5i$ はともに L の要素であることを示せ．また， z が L の要素でないとき， $z+5, z+5i$ はともに L の要素でないことを示せ．
- (5) m_{10} を求めよ．また， k を自然数として， m_{5k} を k を用いて表せ．
- (6) $m_n \leq 2019 < m_{n+1}$ となる n を求めよ．

以下余白

