

2019年度 入学試験問題

数 学

注 意

- (1) 解答用紙は(一)と(二)のそれぞれ1枚ずつである。
- (2) 受験番号の記入欄は、解答用紙(一)、(二)のそれぞれ表面に2か所、裏面に1か所ある。合計6か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (3) 氏名の記入欄は、解答用紙(一)、(二)の表面にそれぞれ1か所ある。合計2か所とも正確・明瞭に記入すること。
- (4) 解答はすべて**解答用紙の所定の箇所**に記入すること。
問題〔Ⅰ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅰ〕の欄に記入。
問題〔Ⅱ〕の解答は解答用紙(一)の〔Ⅱ〕の欄に記入。
問題〔Ⅲ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅲ〕の欄に記入。
問題〔Ⅳ〕の解答は解答用紙(二)の〔Ⅳ〕の欄に記入。
- (5) 問題紙の本文は2ページである。
- (6) 問題紙の余白は計算に使用してもよい。
- (7) 問題紙を切り離して使用してはならない。
- (8) 試験開始後、問題紙に落丁・損傷がないか確認すること。
- (9) 試験終了後、問題紙は各自持ち帰ること。

〔 I 〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

- (1) i を虚数単位とする．等式 $(2 + \sqrt{3} + i)\alpha + (1 - i)\gamma = (3 + \sqrt{3})\beta$ を満たす相異なる 3 つの複素数 α, β, γ を考え、複素数平面上の 3 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を考える． $\triangle ABC$ において、 $\angle A, \angle B$ の大きさを度数法で求めると $\angle A = \text{ア}^\circ$ 、 $\angle B = \text{イ}^\circ$ であり、2 辺の比 $AB : AC$ は $AB : AC = \sqrt{2} : \text{ウ}$ である． $\alpha = 1 + i$ 、 $\beta = 3 + i$ のとき、点 A を中心として点 B を 60° だけ反時計回りに回転した点 D を表す複素数は エ であり、直線 AC に関して点 D と対称な位置にある点を表す複素数は オ である。
- (2) n を 5 以上の自然数とする．箱にコインが n 枚入っており、その内訳は 1 枚が表と裏の両面が白、2 枚が両面が黒、残り $(n - 3)$ 枚が表が白で裏が黒である．この箱から 2 枚のコインを同時に取り出して同時に投げたとき、出た面の色が異なる事象を A 、出た面の色がともに白の事象を B 、出ている面の色がともに黒の事象を C 、出ている面の色が異なる事象を D とする．コインは投げたときに表と裏が同じ確率で出るとすると、確率 $P(A) = \text{カ}$ 、 $P(B) = \text{キ}$ であり、条件付き確率 $P_B(C) = \text{ク}$ 、 $P_B(D) = \text{ケ}$ である． $P_B(C) = P_B(D)$ となるのは $n = \text{コ}$ のときである。

〔 II 〕 定数 a, b は $a > b$ とする．座標平面上で、3 つの関数 $y = e^{-x}$ 、 $y = a \sin x$ 、 $y = b \sin x$ に対するそれぞれのグラフの $0 \leq x \leq 2\pi$ の部分を、それぞれ曲線 C, D, E とする．さらに、2 曲線 C, D は共有点 P をもち、点 P で共通の接線をもつとする．また、2 曲線 C, E は共有点 Q をもち、点 Q で共通の接線をもつとする．この 2 点 P, Q の x 座標をそれぞれ p, q とする．次の問いに答えよ．

- (1) $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき、方程式 $\sin x + \cos x = 0$ を解け．
- (2) a, b, p, q の値をそれぞれ求めよ．
- (3) 曲線 C の $p \leq x \leq q$ の部分を C_1 、曲線 D の $0 \leq x \leq p$ の部分を D_1 、曲線 E の $\pi \leq x \leq q$ の部分を E_1 とする．これら 3 曲線 C_1, D_1, E_1 と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

〔Ⅲ〕 xyz 空間において、原点 O を中心とする xy 平面上の半径 1 の円を C とする．円 C 上に y 座標の値が正であるような点 P を考え、点 P の x 座標を p とする． zx 平面上に 2 点 $A(1, 0, 1)$, $B(\frac{2}{5}, 0, \frac{4}{5})$ をとる．次の問いに答えよ．

- (1) 直線 AB と xy 平面の交点を E とする．点 E の座標を求めよ．
- (2) $p \neq -\frac{1}{2}$ とする．(1) の点 E に対して、直線 EP と円 C の交点で、点 P と異なる点を Q とするとき、点 Q の y 座標を p を用いて表せ．
- (3) 2 点 F, G は円 C 上にあり、点 F の y 座標の値は正とする． $\overrightarrow{BG} = t\overrightarrow{AF}$ を満たす実数 t が存在するとき、点 F の x 座標の値を求めよ．
- (4) $p \neq -\frac{1}{2}$ とし、点 P は (3) の点 F と異なるとする．円 C 上に点 P と異なる点 R を考える．2 点 A, P と直線 BR 上の点 U の 3 点が一直線上にあるとき、2 点 R, U の y 座標をそれぞれ p を用いて表せ．

〔Ⅳ〕 n を 9 以上の自然数とする．区間 $0 < x < 1$ で定義された関数 $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^n}$ を考える．次の問いに答えよ．

- (1) $f'(x) = 0$ となる x の値を a_n とする． a_n , $f(a_n)$ を求めよ．また、 $f(a_n)$ が極大値であるか極小値であるかを判定せよ．
- (2) $f(x)$ は 2 つの変曲点をもつことを示せ．また、それら 2 つの変曲点を $(b_n, f(b_n))$, $(c_n, f(c_n))$ ($b_n < c_n$) とするとき、 b_n を求めよ．
- (3) (1) の a_n と (2) の b_n は、9 以上のすべての自然数 n に対して、次の不等式を満たすことを示せ．

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2} \leq \frac{\log b_n}{\log a_n} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

- (4) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ．
- (5) 曲線 $y = f(x)$ ($0 < x < 1$) と 2 直線 $x = a_n$, $x = b_n$, および x 軸で囲まれた図形の面積を S_n とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^n S_n$ を求めよ．