

【Ⅰ】

〔解答〕

ア		イ		ウ	
-2		-1		$1+\sqrt{2}$	
エ		オ		カ	
$\frac{(1-\sqrt{2})^n+(1+\sqrt{2})^n}{2}$		$(-1)^n$		$\frac{5}{12}$	
キ		ク		ケ	
$\frac{35}{108}$		$\frac{7}{27}$		$\frac{7}{1296}$	
				$\frac{1}{11664}$	

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}a_{n+1}+\sqrt{2}b_{n+1}&=\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}\\&=\left(1-\sqrt{2}\right)\left(a_n+\sqrt{2}b_n\right)\\&=\left(a_n-2b_n\right)+\left(-a_n+b_n\right)\sqrt{2}\end{aligned}$$

であり、 $\sqrt{2}$ は無理数であるから、

$$\begin{cases}a_{n+1}=a_n-2b_n\\b_{n+1}=-a_n+b_n\end{cases}$$

が成り立つ。したがって、

$$u=-2, v=1$$

である。これより、

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{a_{n+1}-\sqrt{2}b_{n+1}}{a_n-\sqrt{2}b_n}\\&=\frac{a_n-2b_n-\sqrt{2}(-a_n+b_n)}{a_n-\sqrt{2}b_n}\\&=\frac{(1+\sqrt{2})a_n-\sqrt{2}(1+\sqrt{2})b_n}{a_n-\sqrt{2}b_n}\\&=\frac{(1+\sqrt{2})(a_n-\sqrt{2}b_n)}{a_n-\sqrt{2}b_n}\\&=1+\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$a_{n+1}-\sqrt{2}b_{n+1}=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(a_n-\sqrt{2}b_n\right)$$

となる。

$$a_1+\sqrt{2}b_1=1-\sqrt{2}$$

であり、 $\sqrt{2}$ は無理数であるから、 $a_1=1, b_1=-1$ となる。これより、数列 $\{a_n-\sqrt{2}b_n\}$ は初項

$a_1-\sqrt{2}b_1=1+\sqrt{2}$ 、公比 $1+\sqrt{2}$ の等比数列となるから、

$$\begin{aligned}a_n-\sqrt{2}b_n&=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}\\&=\left(1+\sqrt{2}\right)^n\end{aligned}$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{(a_n+\sqrt{2}b_n)+(a_n-\sqrt{2}b_n)}{2}\\&=\frac{(1-\sqrt{2})^n+(1+\sqrt{2})^n}{2}\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}d_n&=a_n^2-2b_n^2\\&=(a_n+\sqrt{2}b_n)(a_n-\sqrt{2}b_n)\\&=\left(1-\sqrt{2}\right)^n\left(1+\sqrt{2}\right)^n\\&=(-1)^n\end{aligned}$$

となる。

(2)

2回目と3回目の目の出方の総数は

$$6^2=36(\text{通り})$$

である。2回目に出た目が j だったとき、3回目に出る目が $j-1$ 以下ならば、3回目にPを1以上動かすから、3回目にPを1以上動かす確率は、

$$\frac{0+1+2+3+4+5}{36}=\frac{5}{12}$$

である。次に、1回目と2回目と3回目の目の出方の総数は

$$6^3=216(\text{通り})$$

である。1回目に出た目を i 、2回目に出た目を j 、3回目に出た目を k とする。2回目にPを1以上動かすためには

$$j=1, 2, \cdots i-1$$

であればよい。これが実現されるのは $i\geq 2$ のときである。まず i を固定して考える。3回目にPを動かさないのは、3回目に出る目が j 以上のときである。この場合の数は

$$j=1\text{のとき：}k=1, 2, 3, 4, 5, 6\text{の}6\text{通り}$$

$$j=2\text{のとき：}k=2, 3, 4, 5, 6\text{の}5\text{通り}$$

$$\cdots$$

$$j=i-1\text{のとき：}k=i-1, i, \cdots 6\text{の}(8-i)\text{通り}$$

である。これらの和をとると、

$$\sum_{j=1}^{i-1}(7-j)=\frac{1}{2}\{6+(8-i)\}(i-1)=\frac{1}{2}(14-i)(i-1)\text{通り}$$

となる。次に、 $i=2, 3, 4, 5, 6$ について足し合わせると

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^6\frac{1}{2}(14-i)(i-1)&=\frac{1}{2}(12\cdot 1+11\cdot 2+10\cdot 3+9\cdot 4+8\cdot 5)\\&=70(\text{通り})\end{aligned}$$

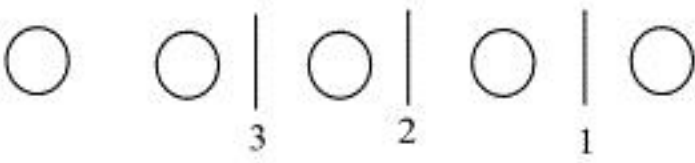
となる。よって、2回目にPを1以上動かし、3回目にPを動かす確率は、

$$\frac{70}{216}=\frac{35}{108}$$

である。また、4, 5, 6回目の目の出方の総数は、

$$6^3=216(\text{通り})$$

である。1, 2, 3回目のすべてで1の目が出たとき、6回目の操作の結果、点Pの座標が1となるのは、4, 5, 6回目の目がこの順に単調非減少になるときである。ここで、3個の仕切りと5個のボールを一列に並べると、右から $i(i=1, 2, 3)$ 番目の仕切りより右側にある「ボールの数+1」を、 $i+3$ 回目に出るさいころの目と考えれば、得られるさいころの目は単調非減少となる。



例えば、上図の場合、右から1番目の仕切りより右側にある「ボールの数+1」(4回目に出るさいころの目)は2、2番目の仕切りより右側にある「ボールの数+1」(5回目に出るさいころの目)は3、3番目の仕切りより右側にある「ボールの数+1」(5回目に出るさいころの目)は4となり、確かに単調非減少となっている。

したがって、4, 5, 6回目の目がこの順に単調非減少になるような、さいころの目の出方は、3個の仕切りと5個のボールを一列に並べる場合の数に一致し、これは

$${}_{5+3}C_3=56(\text{通り})$$

であり、1, 2, 3回目のすべてで1の目が出たとき、6回目の操作の結果、点Pの座標が1となる確率は、

$$\frac{56}{216}=\frac{7}{27}$$

である。さらに、6回のさいころの目の出方は 6^6 通りあり、このうち、6回目の操作の結果、点Pの座標が1となるのは、1回目に1の目が出て、かつ6回のさいころの目が単調非減少になるときである。このような目の出方は、先ほどの□の解説と同様に考えることで、5個のボールと5枚の仕切りを一列に並べる場合の数に一致し、これは ${}_{5+5}C_5$ (通り)ある。したがって、6回目の操作の結果、点Pの座標が1となる確率は、

$$\frac{{}_{10}C_5}{6^6}=\frac{7}{1296}$$

である。また、6回目の操作後、点Pの座標の最大値は、目の出方が(6, 5, 4, 6, 5, 4)のときで、 $6+5+4+0+5+4=24$ である。このことを考慮すると、6回目の操作の結果、点Pの座標が23となるのは、目の出方が、

$$(6, 5, 6, 5, 4, 3), (6, 5, 4, 6, 5, 3), (6, 5, 3, 6, 5, 4), (6, 5, 4, 3, 6, 5)$$

の4通りのときであるため、6回目の操作の結果、点Pの座標が23となる確率は

$$\frac{4}{6^6}=\frac{1}{11664}$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ を連立し、 y を消去すると、

$$\begin{aligned} m(x+3) &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2(x+3) - m(x+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 3m)(x+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3m}, -3 \quad (\because m > 0) \end{aligned}$$

を得る。この解は、 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標に等しく、 $0 < m < 3$ より

$$-3 < -\sqrt{3m} < \sqrt{3m}$$

であり、 $p < q < r$ であるから、

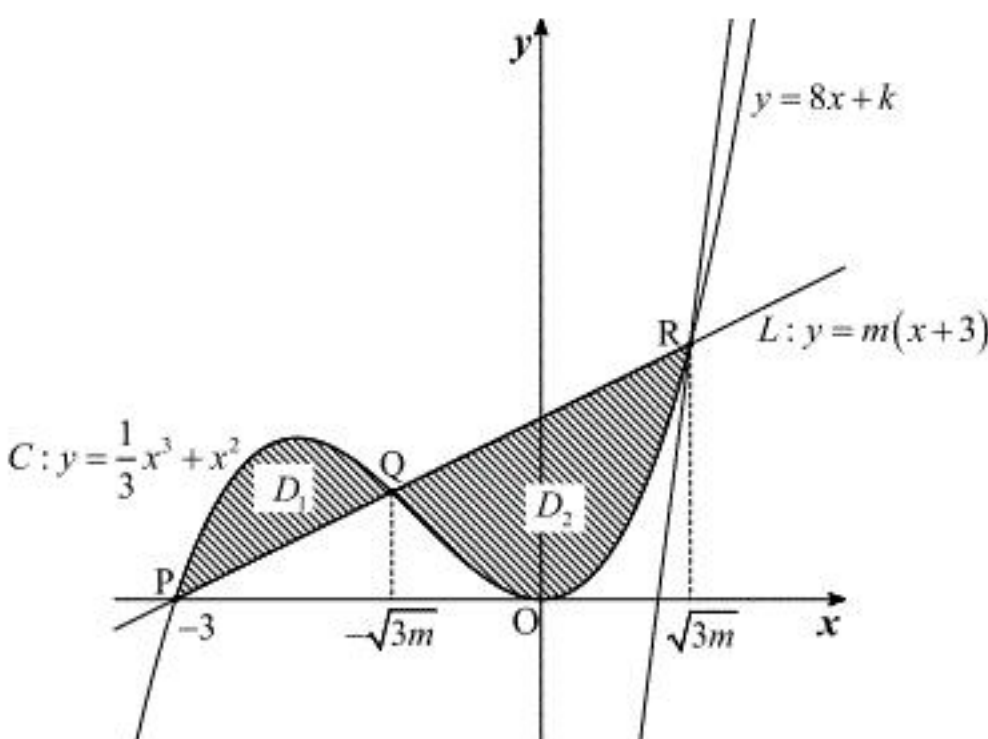
$$p = -3, q = -\sqrt{3m}, r = \sqrt{3m}$$

となる。

$$(答) \begin{cases} p = -3 \\ q = -\sqrt{3m} \\ r = \sqrt{3m} \end{cases}$$

(2)

以下に領域 D_1 および領域 D_2 を斜線部で示す。



まず、

$$-8x + y = k$$

とおくと、

$$y = 8x + k \quad \cdots \textcircled{1}$$

となり、これは座標平面上において、傾き 8、 y 切片 k の直線を表す。図より、 $\textcircled{1}$ と D_2 が共有点をもつという条件の下で、 k が最小になるのは、直線 $\textcircled{1}$ が $x > 0$ において $y=g(x)$ に接するときか、点 R を通るときである。 $y=g(x)$ の接線であって傾きが 8 であり、接点が $x > 0$ にあるものを求める。

$$g'(x) = x^2 + 2x$$

より、接点の x 座標を t ($t > 0$) とおくと、

$$\begin{aligned} t^2 + 2t &= 8 \\ \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+4)(t-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow t = 2 \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

であるから、接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 8(x-2) + \frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2^2 \\ \Leftrightarrow y &= 8x - \frac{28}{3} \end{aligned}$$

となる。以下、点 R の x 座標によって、場合分けする。

[1] $\sqrt{3m} < 2 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{4}{3}$ ($\because m > 0$) のとき

$\textcircled{1}$ と D_2 が共有点をもつという条件の下で、 k が最小になるのは、図より、直線 $\textcircled{1}$ が点 R を通るときである。点 R を通り、傾きが 8 であるような直線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 8(x - \sqrt{3m}) + m(\sqrt{3m} + 3) \\ \Leftrightarrow y &= 8x + \sqrt{3m}^{\frac{3}{2}} + 3m - 8\sqrt{3m}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

であるから、このときの最小値は $\sqrt{3m}^{\frac{3}{2}} + 3m - 8\sqrt{3m}^{\frac{1}{2}}$ である。

[2] $\frac{4}{3} \leq m < 3$ のとき

k が最小になるのは、直線 $\textcircled{1}$ が $x > 0$ において $y=g(x)$ に接するときであり、そのときの値は $-\frac{28}{3}$ である。

以上、[1], [2] より、 $-8x + y$ の最小値は、

$$0 < m < \frac{4}{3} \text{ のとき, } \sqrt{3m}^{\frac{3}{2}} + 3m - 8\sqrt{3m}^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{4}{3} \leq m < 3 \text{ のとき, } -\frac{28}{3}$$

となる。

$$(答) \begin{cases} 0 < m < \frac{4}{3} \text{ のとき, } \sqrt{3m}^{\frac{3}{2}} + 3m - 8\sqrt{3m}^{\frac{1}{2}} \\ \frac{4}{3} \leq m < 3 \text{ のとき, } -\frac{28}{3} \end{cases}$$

(3)

(2) の図より、

$$\begin{aligned} S_1(m) &= \int_{-3}^{-\sqrt{3m}} \left\{ \frac{1}{3}x^3 + x^2 - m(x+3) \right\} dx \\ &= \int_{-3}^{-\sqrt{3m}} \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - mx - 3m \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 3mx \right]_{-3}^{-\sqrt{3m}} \\ &= \left(\frac{3}{4}m^2 - \sqrt{3m}^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}m^2 + 3\sqrt{3m}^{\frac{3}{2}} \right) - \left(\frac{27}{4} - 9 - \frac{9}{2}m + 9m \right) \\ &= -\frac{3}{4}m^2 + 2\sqrt{3m}^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2}m + \frac{9}{4} \\ S_2(m) &= \int_{-\sqrt{3m}}^{\sqrt{3m}} \left\{ m(x+3) - \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \right\} dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{3m}} (3m - x^2) dx \\ &= 2 \left[3mx - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{3m}} \\ &= 2 \left(3\sqrt{3m}^{\frac{3}{2}} - \sqrt{3m}^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= 4\sqrt{3m}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

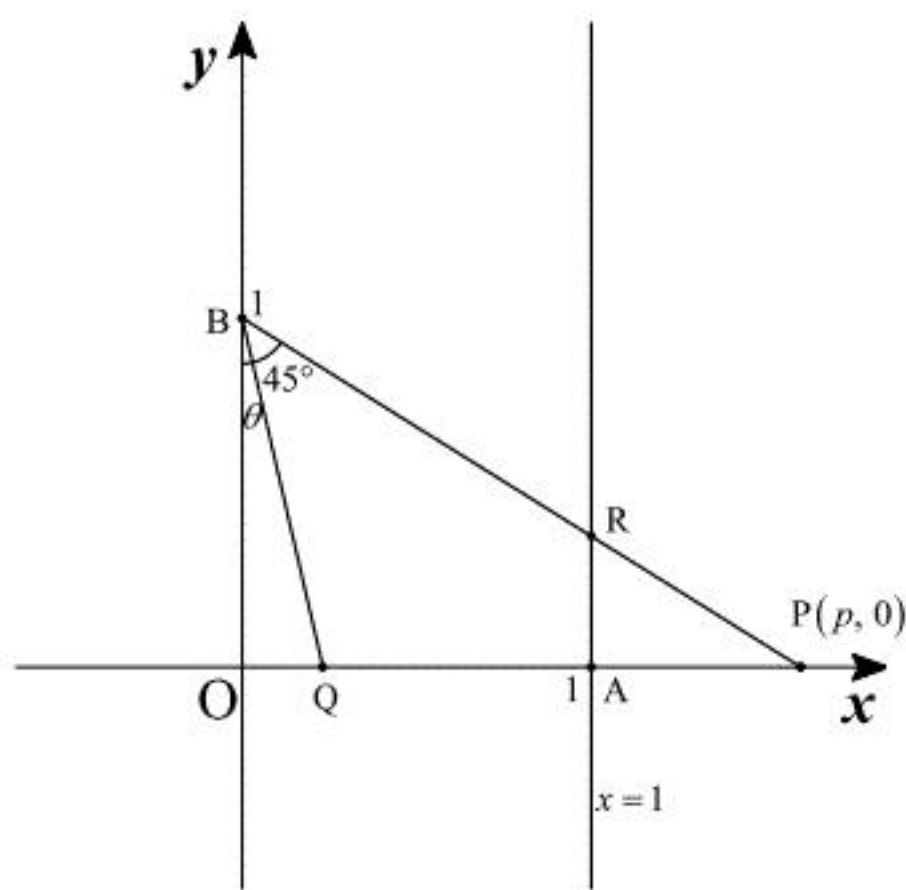
であるから、

$$\begin{aligned} 2S_1(m) &= S_2(m) \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2}m^2 + 4\sqrt{3m}^{\frac{3}{2}} - 9m + \frac{9}{2} &= 4\sqrt{3m}^{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}m^2 + 9m - \frac{9}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 + 6m - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow m = -3 + 2\sqrt{3} \quad (\because 0 < m < 3) \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad m = -3 + 2\sqrt{3}$$

〔Ⅲ〕



(1)

三角形 PBO に着目すると、

$$\begin{aligned}\tan(\theta + 45^\circ) &= p \\ \Leftrightarrow \frac{\tan \theta + \tan 45^\circ}{1 - \tan \theta \tan 45^\circ} &= p \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} &= p\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\angle PBO < 90^\circ$ 、 $\angle PBQ = 45^\circ$ より、 $0^\circ < \theta < 45^\circ$ であるから $\tan \theta \neq 1$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} &= p \\ \Leftrightarrow 1 + \tan \theta &= p - p \tan \theta \\ \Leftrightarrow (1 + p) \tan \theta &= p - 1 \\ \Leftrightarrow \tan \theta &= \frac{p - 1}{p + 1}\end{aligned}$$

となる。また、直線 PB の方程式は、

$$y = \frac{0 - 1}{p - 0}x + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{p}x + 1$$

であるから、 $R\left(1, 1 - \frac{1}{p}\right)$ となる。ゆえに、 $AR = 1 - \frac{1}{p}$ である。

$$(\text{答}) \quad \tan \theta = \frac{p - 1}{p + 1}, \quad AR = 1 - \frac{1}{p}$$

(2)

OB = 1 より、

$$OQ = \tan \theta = \frac{p - 1}{p + 1}$$

であるから、 $Q\left(\frac{p - 1}{p + 1}, 0\right)$ である。ゆえに、

$$AQ = 1 - \frac{p - 1}{p + 1} = \frac{2}{p + 1}$$

である。ここで、

$$\frac{p}{p + 1} = t \Leftrightarrow p = \frac{t}{1 - t} \quad (\because t \neq 1)$$

であるから、

$$\begin{aligned}AQ + AR &= \frac{2}{p + 1} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{2}{\frac{t}{1 - t} + 1} + \left(1 - \frac{1 - t}{t}\right) \\ &= \frac{2(1 - t)}{t + 1 - t} + \left(1 - \frac{1}{t} + 1\right) \\ &= 4 - 2t - \frac{1}{t}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad AQ + AR = 4 - 2t - \frac{1}{t}$$

(3)

いま、

$$t = \frac{p}{p + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{p}}$$

であり、 $p > 1$ より、 $0 < \frac{1}{p} < 1$ であるから、 $\frac{1}{2} < t < 1$ である。 $2t > 0$ 、 $\frac{1}{t} > 0$ より、相加・相乗平均の大小関係から、

$$\begin{aligned}AQ + AR &= 4 - \left(2t + \frac{1}{t}\right) \\ &\leq 4 - 2\sqrt{2t \cdot \frac{1}{t}} \\ &= 4 - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。等号は、

$$2t = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(\because \frac{1}{2} < t < 1\right)$$

で成立し、 $\frac{1}{2} < t < 1$ の範囲で確かに等号が成立するような t が存在する。 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、

$$\begin{aligned}p &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \sqrt{2} + 1\end{aligned}$$

であるから、 $AQ + AR$ は $p = \sqrt{2} + 1$ で最大値 $4 - 2\sqrt{2}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad 4 - 2\sqrt{2} \quad (p = \sqrt{2} + 1)$$

(4)

直線 QR の方程式は、

$$\begin{aligned}y &= \frac{0 - \frac{p - 1}{p + 1}}{\frac{p - 1}{p + 1} - 1} \left(x - \frac{p - 1}{p + 1}\right) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{-(p - 1)(p + 1)}{p(p - 1) - p(p + 1)} \left(x - \frac{p - 1}{p + 1}\right) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{(p - 1)(p + 1)}{2p} \left(x - \frac{p - 1}{p + 1}\right) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{p^2 - 1}{2p}x - \frac{(p - 1)^2}{2p} \\ \Leftrightarrow 2py &= (p^2 - 1)x - (p - 1)^2 \\ \Leftrightarrow (p^2 - 1)x - 2py - (p - 1)^2 &= 0\end{aligned}$$

である。この直線と円 C の中心 P(p, 0) との距離は、

$$\begin{aligned}\frac{\left|(p^2 - 1)p - 2p \cdot 0 - (p - 1)^2\right|}{\sqrt{(p^2 - 1)^2 + (-2p)^2}} &= \frac{\left|p^3 - p - p^2 + 2p - 1\right|}{\sqrt{p^4 - 2p^2 + 1 + 4p^2}} \\ &= \frac{\left|p^3 - p^2 + p - 1\right|}{\sqrt{p^4 + 2p^2 + 1}} \\ &= \frac{(p^2 + 1)(p - 1)}{p^2 + 1} \quad (\because p > 1) \\ &= p - 1\end{aligned}$$

であり、これは円 C の半径に等しいから、直線 QR は円 C に接する。

(証明終)