

【Ⅰ】

【解答】

ア	$s_x^2 + \bar{x}^2$	イ	$s_{xy} + \bar{x} \cdot \bar{y}$	ウ	$s_y^2 + \bar{y}^2$
イ	$s_{xy} + \bar{x} \cdot \bar{y}$	オ	$\frac{\bar{y}s_x^2 - \bar{x}s_{xy}}{s_x^2}$	カ	56
ウ	$s_y^2 + \bar{y}^2$	ク	12	ケ	5
				コ	6

【解説】

(1)

条件より、変形を行うと

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-x_i a - b + y_i)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 a^2 + b^2 + 2x_i a b - 2x_i y_i a - 2y_i b + y_i^2) \\ &= b^2 + 2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) a b + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a^2 - 2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) a - 2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right) b + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i &= \bar{x} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i &= \bar{y} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i &= s_{xy} + \bar{x} \cdot \bar{y} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{ (x_i - \bar{x})^2 + 2\bar{x}x_i - \bar{x}^2 \} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + 2\bar{x} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}^2 \\ &= s_x^2 + 2\bar{x} \cdot \bar{x} - \bar{x}^2 \\ &= s_x^2 + \bar{x}^2 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 &= s_y^2 + \bar{y}^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$R = b^2 + 2\bar{x}ab + (s_x^2 + \bar{x}^2)a^2 - 2\bar{y}b - 2(s_{xy} + \bar{x} \cdot \bar{y})a + s_y^2 + \bar{y}^2$$

となる。この式の左辺をさらに変形すると、

$$\begin{aligned} &b^2 + 2\bar{x}ab + (s_x^2 + \bar{x}^2)a^2 - 2\bar{y}b - 2(s_{xy} + \bar{x} \cdot \bar{y})a + s_y^2 + \bar{y}^2 \\ &= \{b - (\bar{y} - \bar{x}a)\}^2 - (\bar{y} - \bar{x}a)^2 + (s_x^2 + \bar{x}^2)a^2 - 2(s_{xy} + \bar{x} \cdot \bar{y})a + s_y^2 + \bar{y}^2 \\ &= \{b - (\bar{y} - \bar{x}a)\}^2 + s_x^2 a^2 - 2s_{xy}a + s_y^2 \\ &= \{b - (\bar{y} - \bar{x}a)\}^2 + s_x^2 \left(a - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \right)^2 - s_x^2 \left(\frac{s_{xy}}{s_x^2} \right)^2 + s_y^2 \\ &= \{b - (\bar{y} - \bar{x}a)\}^2 + s_x^2 \left(a - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \right)^2 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2} + s_y^2 \end{aligned}$$

となる。したがって、 R は

$$\begin{cases} a = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \\ b = \bar{y} - \bar{x}a \end{cases} \therefore a = \frac{s_{xy}}{s_x^2}, b = \frac{\bar{y}s_x^2 - \bar{x}s_{xy}}{s_x^2}$$

において最小となる。

(2)

1以上6以下の整数を重複を許して3つ選んで、小さい順に a, b, c とすればよい。この選び方は、ボール5個と仕切り3個を一列に並べて、仕切りで分けられたボールの数に1足して、そのうち小さい方から3つ a, b, c とする方法と1対1に対応する。ゆえに、求める場合の数は ${}_8C_3 = 56$ (通り)である。

次に、 $\log_{a+1} b \geq c$ となる組み合わせを考えることで、

$$\log_{a+1} b \geq c \Leftrightarrow b \geq (a+1)^c \quad (\because a+1 \geq 2)$$

である。したがって、 $c \geq 3$ とすると

$$b \geq (1+1)^3 = 8$$

となり、不適であるから、 $c=1, 2$ の場合のみ調べればよい。

[1] $c=1$ のとき

$b \geq a+1$ となればよい。よって、 $a=1, 2, 3, 4, 5$ である。 a の値を定めた時、 b の値として考えられるものは $6-a$ 個あるから、このような目の出方は

$$5+4+3+2+1=15 \text{ (通り)}$$

ある。

[2] $c=2$ のとき

$b \geq (a+1)^2$ および $b \leq 6$ から、 $(a+1)^2 \leq 6$ である。ゆえに、 $a=1$ である。このとき、

$b=4, 5, 6$ となるから、このような目の出方は3通りある。

以上[1], [2]より、求める場合の数は、

$$15+3=18 \text{ (通り)}$$

である。

次に、 $\log_{(a+1)} b = c-1$ となる組み合わせを考える。ここで、

$$\log_{a+1} b = c-1 \Leftrightarrow b = (a+1)^{c-1} \quad (\because a+1 \geq 2)$$

である。 $c \geq 4$ とすると、

$$b \geq (1+1)^{4-1} = 8$$

となり、不適であるから、 $c=1, 2, 3$ の場合だけ考えればよい。

[i] $c=1$ のとき

$b = (a+1)^0 = 1$ となる。 a は1以上6以下のすべての整数値をとるから、6通りである。

[ii] $c=2$ のとき

$b = a+1$ より、 $(a, b) = (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$ の5通りである。

[iii] $c=3$ のとき

$b = (a+1)^2$ と $b \leq 6$ から、 $a=1$ であるとわかり、このとき $b=4$ である。ゆえに、1通り

となる。

[i], [ii], [iii]より、

$$6+5+1=12 \text{ (通り)}$$

となる。

最後に、 $ax^2+bx+c=0$ について考える。 $ax^2+bx+c=0$ が重解をもつことの必要十分条件は、この2次方程式の判別式を D とすると $D=0$ となることである。よって、

$$b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow b^2 = 4ac$$

が成り立つことである。 a, c が整数であることから、 b^2 は4の倍数である。したがって、 b は偶数である。 a, b, c が6以下の正の整数値をとることに注意すると、

$$\begin{aligned} b=2 \text{ のとき, } ac=1 \text{ より, } (a, c) &= (1, 1) \\ b=4 \text{ のとき, } ac=4 \text{ より, } (a, c) &= (1, 4), (2, 2), (4, 1) \\ b=6 \text{ のとき, } ac=9 \text{ より, } (a, c) &= (3, 3) \end{aligned}$$

であるとわかるから、条件を満たすのは5通りである。

さらに $ax^2+bx+c=0$ の異なる2つの整数解を α, β ($\alpha < \beta$) とする。解と係数の関係から、

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -\frac{b}{a} && \cdots \cdots \text{①} \\ \alpha\beta &= \frac{c}{a} && \cdots \cdots \text{②} \end{aligned}$$

が成り立つ。②より、 $\alpha\beta$ は正なので、 α, β はともに正であるかともに負であるかのどちらかとなる。ともに正であると仮定すると、 $\alpha+\beta$ が正になり、①に反する。ゆえに、 α, β はともに負である。①より、 $\alpha+\beta \geq -6$ となるから、 $-5 \leq \alpha < \beta \leq -1$ である。したがって、 $\alpha+\beta \leq -3$ である。 $-6 \leq \alpha+\beta \leq -3$ をみたす組 (α, β) は、

$$(\alpha, \beta) = (-5, -1), (-4, -1), (-4, -2), (-3, -1), (-3, -2), (-2, -1)$$

であり、このうち $\alpha\beta \leq 6$ をみたすのは、

$$(\alpha, \beta) = (-5, -1), (-4, -1), (-3, -1), (-3, -2), (-2, -1)$$

である。これらの組 (α, β) に対しては、 $a=1$ のとき、

$$b = -(\alpha+\beta), c = \alpha\beta$$

となり、対応する組 (b, c) が1つ定まる。 $a=2$ のとき、

$$b = -2(\alpha+\beta), c = 2\alpha\beta$$

として、対応する組 (b, c) が存在する (α, β) の組み合わせは $(\alpha, \beta) = (-2, -1)$ の1つである。

$a \geq 3$ のときは

$$b = -3(\alpha+\beta) \geq 9$$

となり条件を満たさない。以上より、条件を満たす目の出方は

$$5+1=6 \text{ (通り)}$$

である。

【Ⅱ】

(1)

第 k 群の最後の項は、数列 $\{b_n\}$ の

$$\sum_{l=1}^k l = \frac{1}{2}k(k+1) \text{ (番目)}$$

の項である。したがって、第 k 群の最初の項は、数列 $\{b_n\}$ の

$$\frac{1}{2}k(k+1) - k + 1 = \frac{k^2 - k + 2}{2} \text{ (番目)}$$

の項である。また、

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 2(n-1) \\ &= 2n - 1 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=1}^k (a_k + a_i) \\ &= ka_k + \sum_{i=1}^k (2i-1) \\ &= k(2k-1) + 2 \cdot \frac{1}{2}k(k+1) - k \\ &= 3k^2 - k \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答) 第 } \frac{k^2 - k + 2}{2} \text{ 項目から第 } \frac{1}{2}k(k+1) \text{ 項目, } S_k = 3k^2 - k$$

(2)

$10 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4+1)$ より、 b_{10} は第 4 群の最後の項であるから、

$$b_{10} = a_4 + a_4 = 14$$

である。 $22 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (6+1) + 1$ より、 b_{22} は第 7 群の最初の項であるから、

$$b_{22} = a_7 + a_1 = 14$$

である。 $39 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (8+1) + 3$ より、 b_{39} は第 9 群の 3 番目の項であるから、

$$b_{39} = a_9 + a_3 = 22$$

である。

$$\text{(答) } b_{10} = 14, b_{22} = 14, b_{39} = 22$$

(3)

b_n が第 k 群の i 番目の項であるとする、 $b_n = 10$ のとき、

$$\begin{aligned} a_k + a_i &= 10 \\ \Leftrightarrow 2k-1+2i-1 &= 10 \\ \Leftrightarrow k+i &= 6 \end{aligned}$$

である。したがって、 $1 \leq i \leq k$ より、 $(k, i) = (5, 1), (4, 2), (3, 3)$ が該当する。ここで、

$$\begin{aligned} n &= \frac{k^2 - k + 2}{2} + i - 1 \\ &= \frac{1}{2}k(k-1) + i \end{aligned}$$

であるから、

$$(k, i) = (5, 1) \text{ のとき, } n = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 + 1 = 11$$

$$(k, i) = (4, 2) \text{ のとき, } n = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 + 2 = 8$$

$$(k, i) = (3, 3) \text{ のとき, } n = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 + 3 = 6$$

となる。ゆえに、 $n = 6, 8, 11$ である。また $b_n = 60$ のとき、

$$\begin{aligned} a_k + a_i &= 60 \\ \Leftrightarrow 2k-1+2i-1 &= 60 \\ \Leftrightarrow k+i &= 31 \end{aligned}$$

である。 $i \leq k$ より、 $2i \leq 31$ であるから、 $1 \leq i \leq 15$ となる。 i の値を定めれば、 k の値が 1 つに定まるから、60 は数列 $\{b_n\}$ に 15 回現れる。

$$\text{(答) } n = 6, 8, 11 \text{ 回, 数 } 60 \text{ の出てくる回数: } 15 \text{ 回}$$

(4)

求める数を N とおく。 N が第 k 群の i 番目の項に現れるとすると、

$$\begin{aligned} a_k + a_i &= N \\ \Leftrightarrow 2k-1+2i-1 &= N \\ \Leftrightarrow k+i &= \frac{N}{2} + 1 \end{aligned}$$

である。 $k+i$ は整数であるから、 N は偶数となる。ゆえに、整数 N' を用いて $N = 2N'$ と書ける。このとき、 $k+i = N' + 1$ である。 $i \leq k$ より、 $2i \leq N' + 1$ であるから、 $1 \leq i \leq \frac{N'+1}{2}$ となる。

[1] N' が奇数のとき

$$\frac{N'+1}{2} \text{ は整数となり, } i \text{ は } \frac{N'+1}{2} \text{ 個の数を取りうるから,}$$

$$m = \frac{N'+1}{2} \Leftrightarrow N' = 2m - 1$$

である。したがって、 $N = 4m - 2$ となる。

[2] N' が偶数のとき

$$\frac{N'+1}{2} \text{ 以下の最小の整数は } \frac{N'}{2} \text{ であり, } i \text{ は } \frac{N'}{2} \text{ 個の数を取りうるから,}$$

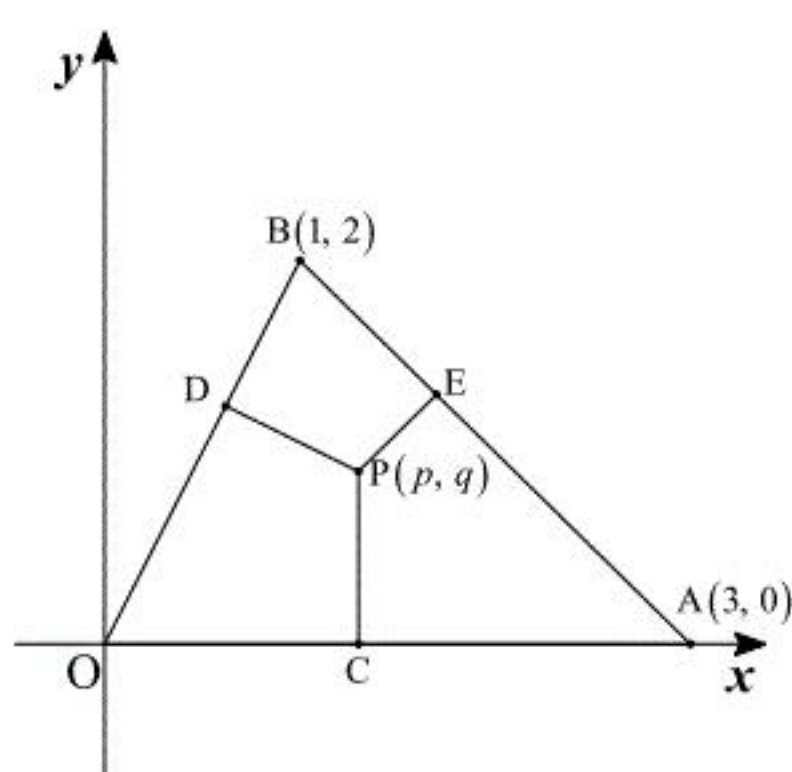
$$m = \frac{N'}{2} \Leftrightarrow N' = 2m$$

である。したがって、 $N = 4m$ となる。

以上[1],[2]より、 $N = 4m, 4m - 2$ となる。

$$\text{(答) } 4m, 4m - 2$$

〔Ⅲ〕



- (1) $C(p, 0)$ である。また、点Dは直線OB上の点であるから、実数 s を用いて $D(s, 2s)$ とおける。
このとき、

$$\overrightarrow{PD} = \begin{pmatrix} s-p \\ 2s-q \end{pmatrix}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{OB} &= (s-p) + 2(2s-q) \\ &= 5s - p - 2q \end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{PD} \perp \overrightarrow{OB}$ より、 $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ であるから、

$$5s - p - 2q = 0 \Leftrightarrow s = \frac{p+2q}{5}$$

を得る。ゆえに、 $D\left(\frac{p+2q}{5}, \frac{2p+4q}{5}\right)$ であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} &= \begin{pmatrix} \frac{p+2q}{5} - p \\ \frac{2p+4q}{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -2p+q \\ p+2q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。つぎに、点Eは直線AB上の点であるから、実数 t を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} \\ &= t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2-2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおける。このとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PE} &= \begin{pmatrix} 2t+1-p \\ -2t+2-q \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{AB} &= -2(2t+1-p) + 2(-2t+2-q) \\ &= 2(-4t+p-q+1) \end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{AB}$ より、 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ であるから、

$$-4t + p - q + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{p-q+1}{4}$$

を得る。これより、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{p-q+1}{2} \\ 2 - \frac{p-q+1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p-q+3}{2} \\ \frac{-p+q+3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CE} &= \begin{pmatrix} \frac{-p-q+3}{2} \\ \frac{-p+q+3}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p-q+3 \\ -p+q+3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る。

$$(答) \quad \overrightarrow{CD} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -2p+q \\ p+2q \end{pmatrix}, \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p-q+3 \\ -p+q+3 \end{pmatrix}$$

- (2)

$$\overrightarrow{CD} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -2p+q \\ p+2q \end{pmatrix}, \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p-q+3 \\ -p+q+3 \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} |(-2p+q)(-p+q+3) - (p+2q)(-p-q+3)| \\ &= \frac{1}{10} |3p^2 + 3q^2 - 9p - 3q| \\ &= \frac{3}{10} |p^2 + q^2 - 3p - q| \end{aligned}$$

を得る。

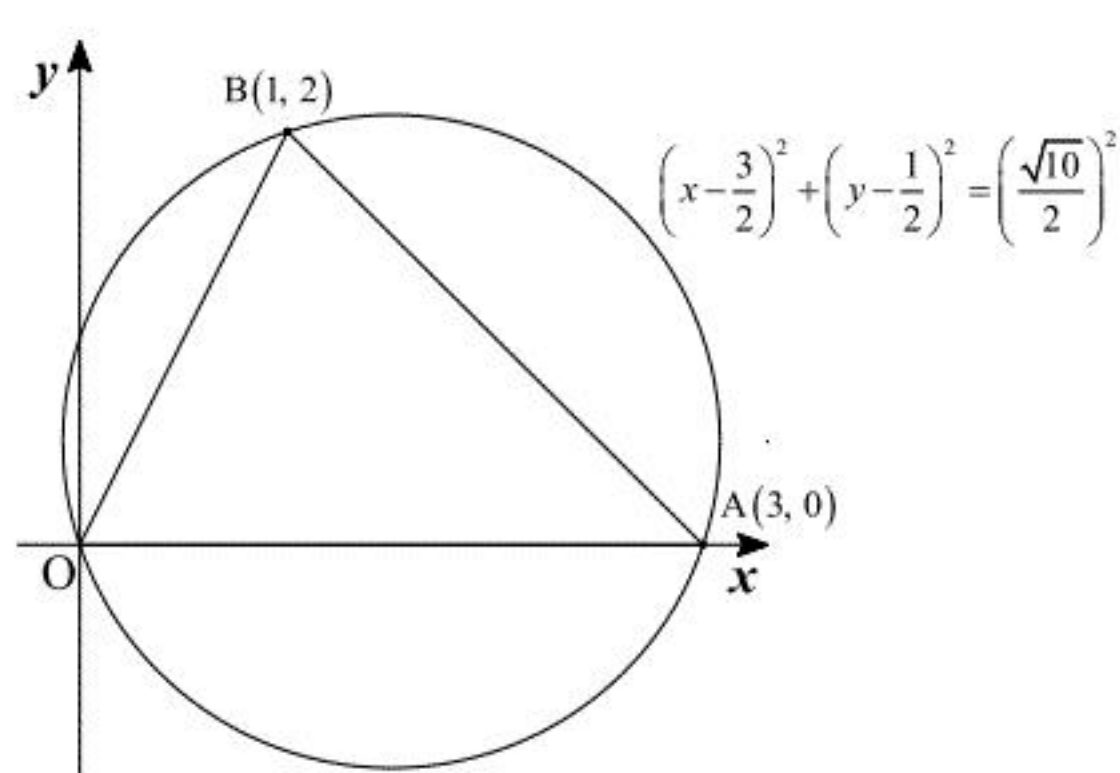
$$(答) \quad S = \frac{3}{10} |p^2 + q^2 - 3p - q|$$

- (3)

$S=0$ のとき、

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 - 3p - q &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(p - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

が成り立つから、点Pの軌跡は、中心 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 、半径 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ の円となり、図示すると下図のようになる。



(答) 前図

- (4)

(3)の図より、三角形OABの内部の任意の点は、円 $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$ の内側にある

ので、点Pが三角形OABの内部を動くとき、

$$\begin{aligned} \left(p - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{1}{2}\right)^2 &< \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow p^2 + q^2 - 3p - q &< 0 \end{aligned}$$

が必要条件である。ここで、

$$\begin{aligned} S &= -\frac{3}{10} (p^2 + q^2 - 3p - q) \\ &= \frac{3}{10} \left\{ \frac{5}{2} - \left(p - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(q - \frac{1}{2}\right)^2 \right\} \end{aligned}$$

と変形すると、 $p = \frac{3}{2}, q = \frac{1}{2}$ 、すなわち点Pの座標が $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ であるとき、 S は最大値

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3}{4}$$

をとる。このときPは確かに△OABの内部に存在する。

$$(答) \quad \text{最大値} \frac{3}{4}, P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$