

【Ⅰ】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ
	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
	エ	オ	
	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{2\sqrt{3}+2}{3}$	
(2)	カ	キ	ク
	$\frac{41}{300}$	$\frac{40}{87}$	$\frac{3}{29}$
	ケ	コ	
	$\frac{(k-10)^2}{(k+1)(k+11)}$	3	

〔解説〕

(1)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2}+y^2=1 \\ y=-x-1 \end{cases}$$

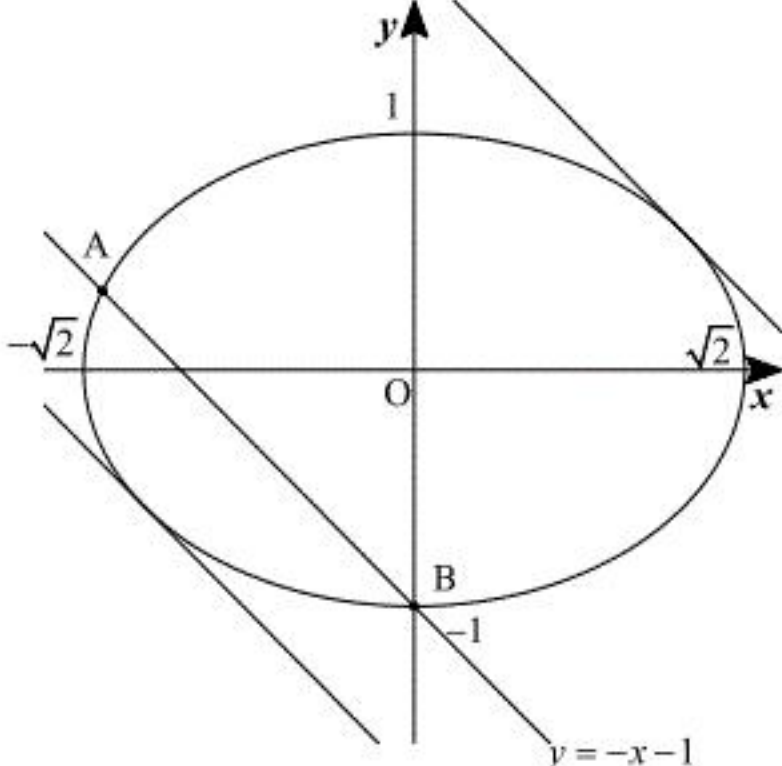
を連立して、

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2}+(-x-1)^2 &=1 \\ \Leftrightarrow 3x^2+4x &=0 \\ \Leftrightarrow x(3x+4) &=0 \\ \therefore x=0, -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、 $(x,y)=\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right), (0,-1)$ であり、 $A\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right), B(0,-1)$ となる。よって、

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\left\{0-\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}^2+\left\{-1-\frac{1}{3}\right\}^2} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

である。



上図より、線分ABを三角形の底辺と見ると、 $\triangle ABC$ の面積が最大値となるのは、楕円

$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ の接線の傾きが線分ABの傾きと等しい2点のうち、 x 座標が正である方を点C

としたときである。 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ を辺々を x で微分すると $x+2y\frac{dy}{dx}=0$ であるから、点Cの x 座標は、

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2}+y^2=1 \\ x+2y\cdot(-1)=0 \\ x>0 \end{cases}$$

から y を消去して、

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2 &=1 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 &=1 \\ \therefore x &= \frac{2}{\sqrt{3}} (\because x>0) \end{aligned}$$

となる。これより、点Cの座標は $(x,y)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ でありこのとき $\triangle ABC$ の面積は、

$$\overline{BA}=\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right), \overline{BC}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right) \text{より、}$$

$$\frac{1}{2}\left|\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{4}{3}\right|=\frac{2\sqrt{3}+2}{3}$$

である。

(2)

袋Aの中の白玉が初めて22個になるのが3回目の試行終了時となるのは、取り出した玉の色の順番が黒、白、黒であった場合と、白、黒、黒であった場合であり、その確率は

$$\frac{10}{30}\cdot\frac{21}{30}\cdot\frac{9}{30}+\frac{20}{30}\cdot\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{30}=\frac{41}{300}$$

である。袋Bから玉を2個取り出すとき、取り出す玉の組を考えると、白玉と黒玉が1個ずつである確率は

$$\frac{20\cdot 10}{{}_{30}C_2}=\frac{40}{87}$$

であり、2個とも黒玉である確率は、

$$\frac{{}_{10}C_2}{{}_{30}C_2}=\frac{3}{29}$$

である。袋Cから玉を10個取り出すとき、取り出す玉の組を考えると

$$P_n=\frac{{}_{10}C_n\cdot {}_{20}C_{10-n}}{{}_{30}C_{10}}=\frac{\frac{10!}{n!(10-n)!}\cdot\frac{20!}{(10-n)!(10+n)!}}{\frac{30!}{10!20!}}$$

であるから、 $k=0,1,\cdots,9$ について、

$$\begin{aligned} \frac{P_{k+1}}{P_k} &= \frac{k!(10-k)!(10-k)!(10+k)!}{(k+1)!(9-k)!(9-k)!(11+k)!} \\ &= \frac{(k-10)^2}{(k+1)(k+11)} \end{aligned}$$

である。これは $k=0,1,\cdots,9$ では常に正である。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{P_{k+1}}{P_k} &>1 \\ \Leftrightarrow \frac{(k-10)^2}{(k+1)(k+11)} &>1 \\ \Leftrightarrow k^2-20k+100 &> k^2+12k+11 \\ \Leftrightarrow 32k &< 89 \\ \Leftrightarrow k &< \frac{89}{32} \end{aligned}$$

であるから、 $\frac{89}{32}=2.7\cdots$ に注意すると、

$$\begin{cases} P_k < P_{k+1} (k=0,1,2) \\ P_k > P_{k+1} (k=3,4,\cdots,9) \end{cases} \\ \therefore P_0 < P_1 < P_2 < P_3 > P_4 > \cdots > P_{10}$$

となる。よって、 P_n は $n=3$ で最大値を取ることが分かる。

【Ⅱ】

(1)

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} p = -\alpha - \beta - 1 \\ q = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = \alpha\beta + \alpha + \beta \\ r = -\alpha \cdot \beta \cdot 1 = -\alpha\beta \end{cases}$$

となる。また、

$$\omega = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{-p-1}{2}$$

は実数であるから、 ω の虚部は0である。

$$(\text{答}) \ (p, q, r) = (-\alpha - \beta - 1, \alpha\beta + \alpha + \beta, -\alpha\beta), \ \omega \text{ の虚部: } 0$$

(2)

複素数 z の虚部を $\text{Im}(z)$ 、実部を $\text{Re}(z)$ と表す。3点 A, B, C が虚軸に平行な1つの直線上に並んでいるとき、 $\text{Re}(\alpha) = 1, \text{Im}(\alpha) \neq 0, \text{Re}(\beta) = 1, \text{Im}(\beta) \neq 0$ である。 $\text{Re}(\alpha) = \text{Re}(\beta)$ であり、 ω の虚部は0となることから、

$$\begin{aligned} \text{Im}(\omega) &= 0 \\ \Leftrightarrow \text{Im}(\alpha) &= -\text{Im}(\beta) \end{aligned}$$

より、 $\alpha = \overline{\beta}$ である。また、 $\text{Re}(\alpha) = 1, \text{Im}(\alpha) \neq 0$ より、 $|\alpha| > 1$ であるから、 $\alpha\beta = |\alpha|^2 > 1$ である。

これらより、

$$\begin{aligned} p &= -(\alpha + \beta) - 1 \\ &= -(\alpha + \overline{\alpha}) - 1 \\ &= -2\text{Re}(\alpha) - 1 \\ &= -3 \\ q &= \alpha\beta + \alpha + \beta \\ &= 2 + \alpha\beta \\ &> 3 \end{aligned}$$

が成立する。逆に、 $p = -3, q > 3$ が成立しているときは、 α を $\text{Re}(\alpha) = 1, \text{Im}(\alpha) > 0, |\alpha| = \sqrt{q-2}$ を満たす複素数とし、 $\beta = \overline{\alpha}$ とすれば、問の条件を満たす。以上より、3点 A, B, C が虚軸に平行な1つの直線上に並ぶ為の必要十分条件は、 $p = -3, q > 3$ である。

$$(\text{答}) \ p = -3, q > 3$$

(3)

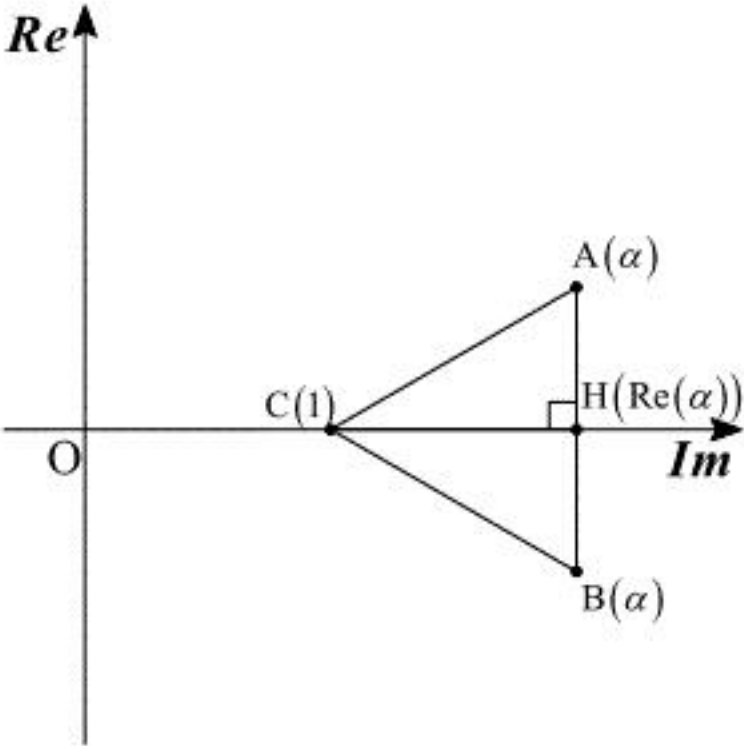
$z^3 + pz^2 + qz + r = 0$ が $z = 1$ を解に持つので、

$$\begin{aligned} 1 + p + q + r &= 0 \\ \therefore r &= -p - q - 1 \end{aligned}$$

となる。これより、 $z^3 + pz^2 + qz + r = 0$ は

$$\begin{aligned} z^3 + pz^2 + qz - p - q - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (z-1)\{z^2 + (p+1)z + (p+q+1)\} &= 0 \end{aligned}$$

と変形できるので、 α, β は $z^2 + (p+1)z + (p+q+1) = 0$ の解となる。 $\triangle ABC$ が正三角形になるには、 α, β の少なくとも一方は虚数となる。ここで、 $z^2 + (p+1)z + (p+q+1) = 0$ の係数が実数であるので、 $\beta = \overline{\alpha}$ を満たす。よって、 α, β の少なくとも一方が虚数であればもう一方も虚数となる。ここで、複素数平面上で線分 AB の中点を H として、 $\triangle ABC$ が正三角形となる時の関係性を考える。



図より、

$$CH = |\text{Re}(\alpha) - 1|, AH = |\text{Im}(\alpha)|$$

となるので、 $\triangle ABC$ が正三角形になるには、

$$\begin{aligned} CH &= \sqrt{3}AH \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}|\text{Im}(\alpha)| &= |\text{Re}(\alpha) - 1| \end{aligned}$$

となればよい。まず、 α, β が虚数になる条件を考える。 $z^2 + (p+1)z + (p+q+1) = 0$ の判別式を D とすると、 α, β が虚数になるので、 $D < 0$ となればよい。よって、

$$D < 0 \Leftrightarrow (p+1)^2 - 4(p+q+1) < 0 \quad \cdots \text{①}$$

となる。次に $\sqrt{3}|\text{Im}(\alpha)| = |\text{Re}(\alpha) - 1|$ について考えると、

$$\begin{aligned} \sqrt{3}|\text{Im}(\alpha)| &= |\text{Re}(\alpha) - 1| \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{4(p+q+1) - (p+1)^2}}{2} &= \left| -\frac{p+1}{2} - 1 \right| \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4} \{4(p+q+1) - (p+1)^2\} &= \left(\frac{p+3}{2} \right)^2 \\ \Leftrightarrow -3p^2 + 6p + 9 + 12q &= p^2 + 6p + 9 \\ \therefore q &= \frac{1}{3}p^2 \end{aligned}$$

となる。これを①に代入して、整理すると、

$$\begin{aligned} (p+1)^2 - 4\left(p + \frac{1}{3}p^2 + 1\right) &< 0 \\ \Leftrightarrow 3(p+1)^2 - 4(3p + p^2 + 3) &< 0 \\ \Leftrightarrow 3(p^2 + 2p + 1) - 4(p^2 + 3p + 3) &< 0 \\ \Leftrightarrow -p^2 - 6p - 9 &< 0 \\ \Leftrightarrow -(p+3)^2 &< 0 \\ \Leftrightarrow (p+3)^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow p &\neq -3 \end{aligned}$$

となるので、 $p \neq -3$ となる。よって、

$$\begin{aligned} r &= -p - q - 1 \\ &= -p - \frac{1}{3}p^2 - 1 \\ &= -\frac{1}{3}\left(p + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であるから、 $p \neq -3$ における範囲は、

$$r \leq -\frac{1}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \ r \leq -\frac{1}{4}$$

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned}(X, Y) &= \left(\frac{p+q}{2}, \frac{2p^2+2q^2}{2} \right) \\ &= \left(\frac{p+q}{2}, p^2+q^2 \right)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) (X, Y) = \left(\frac{p+q}{2}, p^2+q^2 \right)$$

(2)

$$\begin{aligned}\text{PQ} &= 1 \\ \Leftrightarrow (p-q)^2 + (2p^2-2q^2)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (p-q)^2 + 4(p-q)^2(p+q)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (p-q)^2 \{1 + 4(p+q)^2\} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(p-q)^2} &= 16X^2 + 1 \quad (\because p \neq q)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) 16X^2 + 1$$

(3)

$$\begin{aligned}2(p^2+q^2) &= (p+q)^2 + (p-q)^2 \\ \Leftrightarrow 2Y &= (2X)^2 + \frac{1}{16X^2+1} \\ \Leftrightarrow Y &= 2X^2 + \frac{1}{2(16X^2+1)}\end{aligned}$$

である。 X が任意の実数値を取ることに注意すると、 $\frac{1}{16} \cdot 2(16X^2+1) > 0$, $\frac{1}{2(16X^2+1)} > 0$ より、

$$Y = \frac{1}{16} \cdot 2(16X^2+1) + \frac{1}{2(16X^2+1)} - \frac{1}{8} \geq 2\sqrt{\frac{1}{16}} - \frac{1}{8} \quad (\because \text{相加・相乗平均の関係})$$

が成立する。等号は

$$\begin{aligned}\frac{1}{16} \cdot 2(16X^2+1) &= \frac{1}{2(16X^2+1)} \\ \Leftrightarrow (16X^2+1)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 16X^2+1 &= 2 \quad (\because 16X^2+1 > 0) \\ \Leftrightarrow X^2 &= \frac{1}{16} \\ \Leftrightarrow X &= \pm \frac{1}{4}\end{aligned}$$

で成立する。以上より、 Y の最小値は

$$2\sqrt{\frac{1}{16}} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

である。

$$(\text{答}) Y = 2X^2 + \frac{1}{2(16X^2+1)}, Y \text{ の最小値: } \frac{3}{8}$$

(4)

図形 D の面積は、

$$\begin{aligned}\int_p^q 2(x-p)(x-q) dx &= \frac{1}{3}(q-p)^3 \\ &= \frac{1}{3}(16X^2+1)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

である。これは、 $X=0$ のとき最大値 $\frac{1}{3}$ を取る。このとき、(3)より $Y = \frac{1}{2}$ であるから、

$$\begin{cases} \frac{p+q}{2} = 0 \\ p^2+q^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

となる。これから q を消去すると、

$$\begin{aligned}2p^2 &= \frac{1}{2} \\ \therefore p &= -\frac{1}{2} \quad (\because p < 0 < q)\end{aligned}$$

となる。これより、 $(p, q) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ であり、 $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \text{ 最大値 } \frac{1}{3}, P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

[Ⅳ]

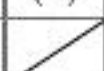
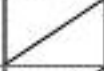
(1)

$$f'(x) = \log x + 1$$
$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

である。 $f(x)$ の定義域が $x > 0$ であることに注意すると、

$$f'(x) > 0$$
$$\Leftrightarrow x > e^{-1}$$

であり、 $f''(x)$ は常に正である。以上より、増減表は下表の通りとなる。

x	(0)	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$

(答) 増減, 凹凸: 前表の通り, 極小値: $f(e^{-1}) = -e^{-1}$

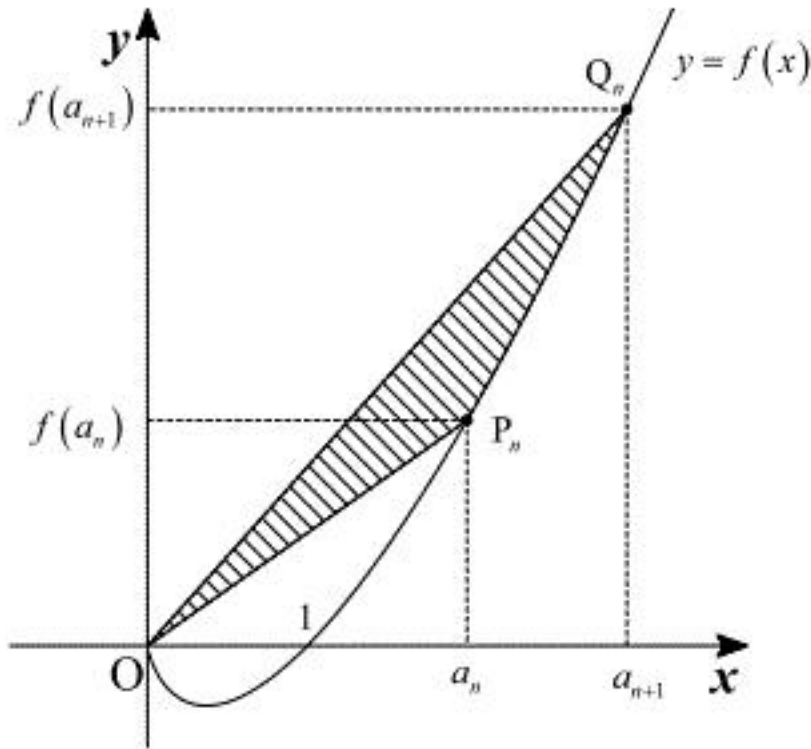
(2)

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \int \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 + C \quad (C: \text{積分定数})$$

である。

(答) $\frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 + C$ (C : 積分定数)

(3)



条件より、

$$\frac{1}{2} f(a_{n+1}) \cdot a_{n+1} - \frac{1}{2} f(a_n) \cdot a_n - \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx = n^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} (a_{n+1}^2 - a_n^2) = n^2$$
$$\Leftrightarrow a_{n+1}^2 = a_n^2 + 4n^2$$

が成立する。これより、 $n \geq 2$ のとき、

$$a_n^2 = a_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} 4k^2$$
$$= a_1^2 + 4 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$= \frac{4}{3} n^3 - 2n^2 + \frac{2}{3} n + 1$$

である。これは、 $n=1$ のときも成立する。

(答) $a_n^2 = \frac{4}{3} n^3 - 2n^2 + \frac{2}{3} n + 1$

(4)

区分求積法より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^3} = \int_0^1 \sqrt{x^3} dx$$
$$= \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1$$
$$= \frac{2}{5}$$

である。

(答) $\frac{2}{5}$

(5)

(3) および $a_k > 0$ ($\because a_1 = 1, a_{k+1} > a_k$) より、 $a_k = \sqrt{\frac{4}{3} k^3 - 2k^2 + \frac{2}{3} k + 1}$ となる。ここで、 $k \geq 1$ であるから、

$$\frac{4}{3} k^3 - \left(\frac{4}{3} k^3 - 2k^2 + \frac{2}{3} k + 1 \right) = 2k^2 - \frac{2}{3} k - 1$$
$$= 2 \left(k - \frac{1}{6} \right)^2 - \frac{19}{18}$$
$$\geq \frac{1}{3} > 0$$
$$\frac{4}{3} k^3 - 2k^2 + \frac{2}{3} k + 1 - \frac{4}{3} (k-1)^3 = 2k^2 - \frac{10}{3} k + \frac{7}{3}$$
$$= 2 \left(k - \frac{5}{6} \right)^2 + \frac{17}{18}$$
$$> 0$$

となる。よって、 $k \geq 1$ の範囲で

$$\frac{4}{3} (k-1)^3 < \frac{4}{3} k^3 - 2k^2 + \frac{2}{3} k + 1 < \frac{4}{3} k^3$$
$$\therefore n^{-\frac{5}{2}} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{3} (k-1)^3} < n^{-\frac{5}{2}} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{3} k^3 - 2k^2 + \frac{2}{3} k + 1} < n^{-\frac{5}{2}} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{3} k^3}$$

となる。ここで、区分求積法より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{5}{2}} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{3} k^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4}{3}} n^{-1} \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^3}$$
$$= \sqrt{\frac{4}{3}} \int_0^1 \sqrt{x^3} dx$$
$$= \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{2}{5}$$
$$= \frac{4}{5\sqrt{3}}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{5}{2}} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{3} (k-1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4}{3}} n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^3}$$
$$= \sqrt{\frac{4}{3}} \int_0^1 \sqrt{x^3} dx$$
$$= \frac{4}{5\sqrt{3}}$$

となる。これより、はさみうちの定理を用いて、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{5}{2}} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{3} k^3 - 2k^2 + \frac{2}{3} k + 1} = \frac{4}{5\sqrt{3}}$$

と導くことが出来る。

(答) $\frac{4}{5\sqrt{3}}$