

【I】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ
	$-t^3-t^2+t+1$	$\frac{32}{27}$	0
(2)	エ	オ	カ
	$4r$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$	$3\sqrt{3}r$
(3)	キ	ク	ケ
	$1+\sqrt{1-r^2}$	$\frac{1}{3}\pi r^2\left(1+\sqrt{1-r^2}\right)$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$
(4)	コ		
	$\frac{8\sqrt{3}}{27}$		

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} \text{関数 } y=f(\theta) &= (1+\sin \theta) \cos ^2 \theta \text { において, } t=\sin \theta \text { とおくと} \\ y &= (1+\sin \theta) \cos ^2 \theta \\ &= (1+\sin \theta)\left(1-\sin ^2 \theta\right) \\ &= (1+t)\left(1-t^2\right) \\ &= -t^3-t^2+t+1 \end{aligned}$$

となる。よって $y=g(t)=-t^3-t^2+t+1$ となる。 $g(t)$ を t で微分すると

$$\begin{aligned} g'(t) &= -3t^2-2t+1 \\ &= -(3t-1)(t+1) \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より $0 \leq t \leq 1$ であるから、定義域に注意して増減表を書く以下のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$g'(t)$	$\nearrow$	+	0	-	$\searrow$
$g(t)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

増減表より、 $y=g(t)$ は $t=\frac{1}{3}$ のときに最大値をとり、その値は

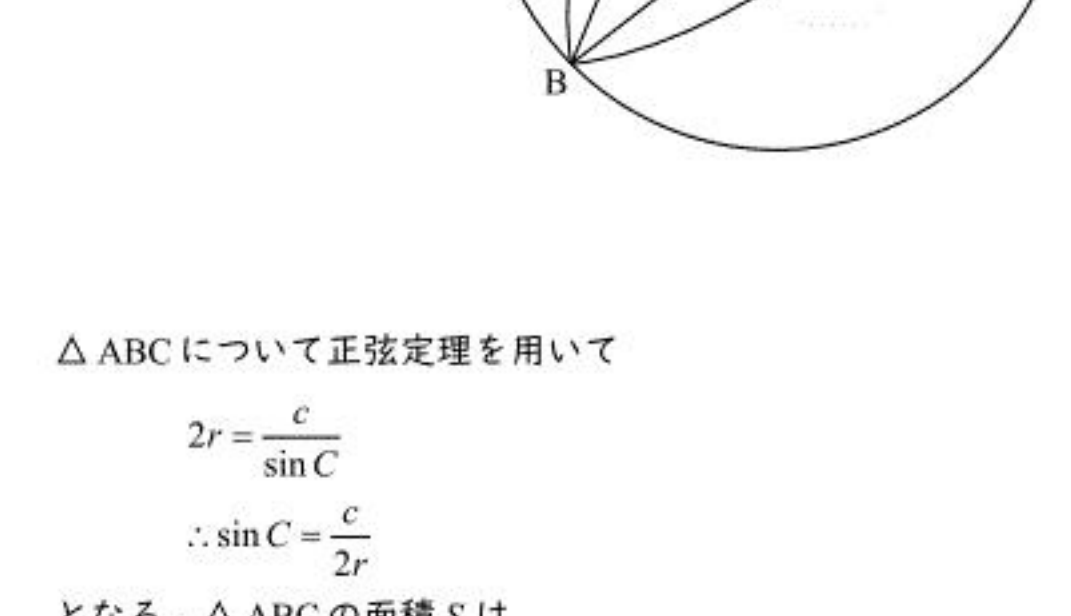
$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{3}\right) &= -\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)+1 \\ &= \frac{32}{27} \end{aligned}$$

となる。また $t=0$ または $t=1$ のときに $g(t)$ は最小値をとり $g(0)=1, g(1)=0$ であるから、最小値は 0 となる。

(2)

半径 r の円に内接する三角形を $\triangle ABC$ とし、 $BC=a, AC=b, AB=c$ とする。また、

$\angle CAB=A, \angle ABC=B, \angle BCA=C$ とする。これらを図示すると以下のようになる。



$\triangle ABC$ について正弦定理を用いて

$$\begin{aligned} 2r &= \frac{c}{\sin C} \\ \therefore \sin C &= \frac{c}{2r} \end{aligned}$$

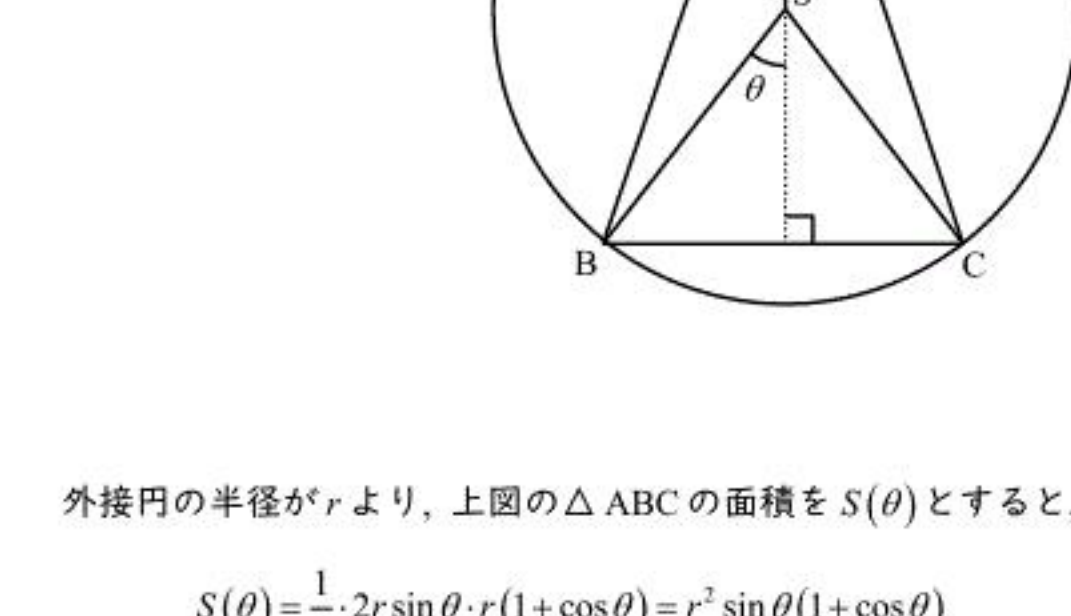
となる。 $\triangle ABC$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4r}$$

となる。よって

$$\frac{abc}{S}=4r$$

となる。次に、 $\triangle ABC$ の面積 S が最大となるときを考える。線分 BC の長さを固定して考えると、点 A が線分 BC から最も遠い位置にあるとき面積 S は最大となる。このとき $AB=AC$ である。したがって、半径 r の円に内接する二等辺三角形の面積が最大となるときについて考えればよい。ここで、 $\triangle ABC$ の外心を S とし、下図のように角 $\theta(0<\theta<\pi)$ を設定する。



外接円の半径が r より、上図の $\triangle ABC$ の面積を $S(\theta)$ とすると、

$$S(\theta)=\frac{1}{2} \cdot 2r \sin \theta \cdot r(1+\cos \theta)=r^2 \sin \theta(1+\cos \theta)$$

である。 $0<S(\theta)$ より、 $S(\theta)$ が最大となるような θ によって、 $\{S(\theta)\}^2$ も最大となるため、以下では、

$$\{S(\theta)\}^2=r^4 \sin ^2 \theta(1+\cos \theta)^2=r^4\left(1-\cos ^2 \theta\right)(1+\cos \theta)^2$$

が最大となる場合について考える。ここで、 $u=\cos \theta(-1<u<1)$ とおくと、

$$\{S(\theta)\}^2=r^4\left(1-u^2\right)(1+u)^2$$

であるから、

$$g(u)=\left(1-u^2\right)(1+u)^2=-u^4-2u^3+2u+1$$

の $-1<u<1$ の範囲における最大値を考えればよい。

$$\begin{aligned} g'(u) &= -4u^3-6u^2+2 \\ &= -2(t+1)\left(2t^2+t-1\right) \\ &= -2(t+1)^2(2t-1) \end{aligned}$$

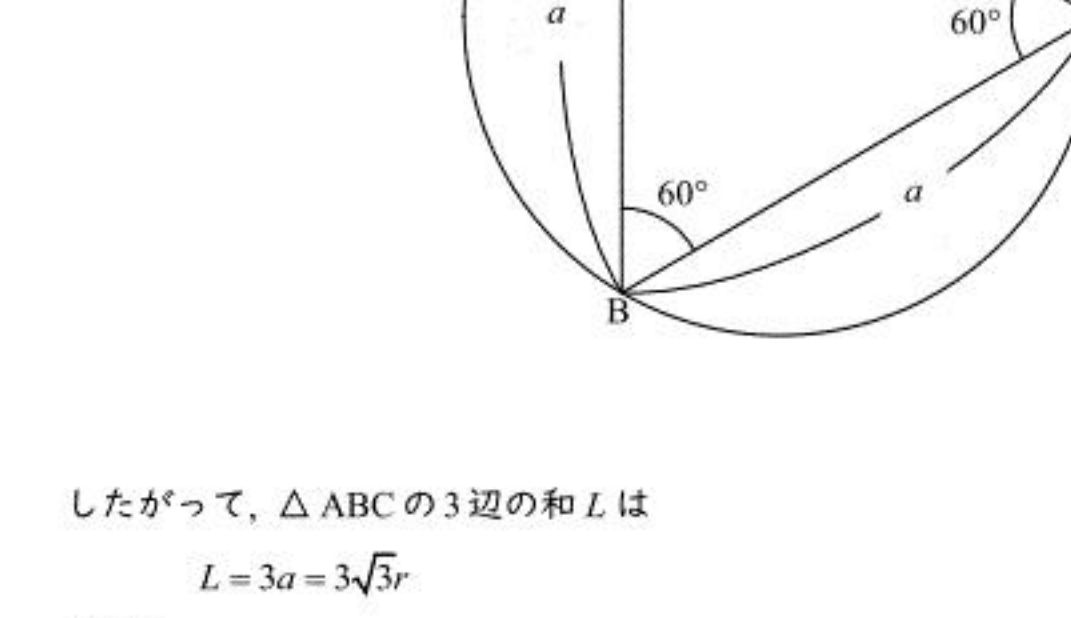
より、 $g(u)$ の増減表を書く以下のようになる。

u	(-1)	...	$\frac{1}{2}$	...	(1)
$g'(u)$		+	0	-	
$g(u)$		$\nearrow$	$\frac{27}{16}$	$\searrow$	

増減表より、 $g(u)$ は $u=\frac{1}{2}$ のときに $\frac{27}{16}$ で最大となる。したがって、 $\{S(\theta)\}^2$ が最大となるのは $\theta=\frac{\pi}{3}$ のときであり、このときに $S(\theta)$ も最大となるから、

$$S=S\left(\frac{\pi}{3}\right)=r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$$

である。また、このとき、 $\triangle ABC$ は以下のような正三角形となっている。



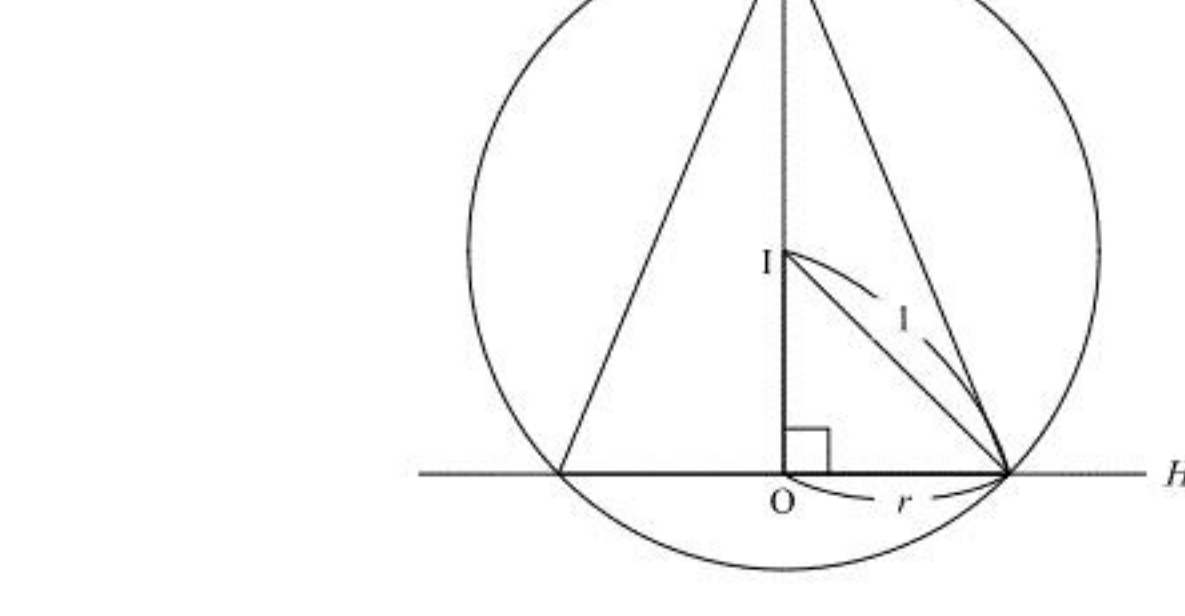
したがって、 $\triangle ABC$ の3辺の和 L は

$$L=3a=3\sqrt{3}r$$

となる。

(3)

球面 K の中心を I とする。円 E の中心 O と球面 K の中心 I を通る平面での球面 K の断面は以下のようになる。



上図より、線分 OI の長さは三平方の定理より

$$OI=\sqrt{1-r^2}$$

となる。よって線分 OD の長さは

$$OD=1+\sqrt{1-r^2}$$

となる。円 E を底面とし、点 D を頂点とする直円錐の体積 W は

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot OD \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2\left(1+\sqrt{1-r^2}\right) \end{aligned}$$

となる。円 E の円周上の異なる3点を頂点とする三角形を底面とし、点 D を頂点とする三角錐のうちで体積 V が最大となるのは、底面の三角形の面積が最大となるときである。(2)より、

三角形の面積が最大となるとき、その面積 S は $S=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{W}{V} &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot OD}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2 \cdot OD} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi \end{aligned}$$

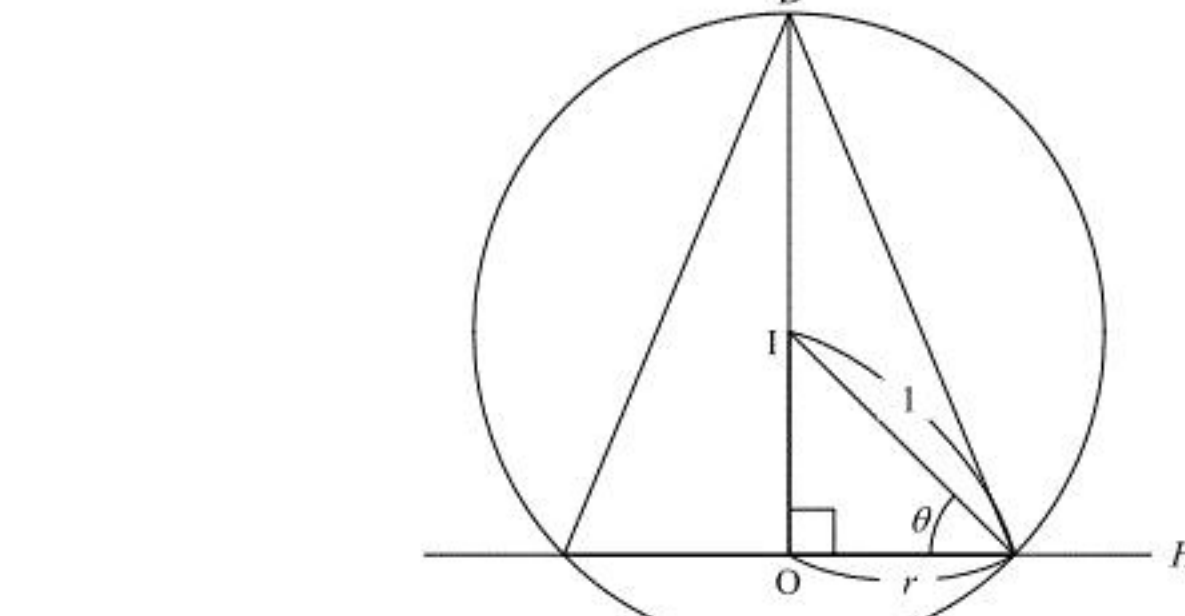
となる。

(4)

(3)より、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2 \cdot OD \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} r^2\left(1+\sqrt{1-r^2}\right) \end{aligned}$$

となる。半径1の円に内接する四面体のうち、体積が最大となる四面体の体積は、 V の最大値である。(3)の図において、以下のように角度 θ をとる。



このとき $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ となる。 $r=\cos \theta$ となるから、

$$V=\frac{\sqrt{3}}{4} \cos ^2 \theta(1+\sin \theta)$$

となる。(1)より $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において $f(\theta)=(1+\sin \theta) \cos ^2 \theta$ の最大値は $\frac{32}{27}$ であるから、体積が

最大となる四面体の体積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{32}{27}=\frac{8\sqrt{3}}{27}$$

となる。

〔Ⅱ〕

(1)

2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の 2 つの実数解 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ において、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = b \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。また、 $\left[\alpha + \frac{1}{2}\right] = -2, \left[\beta + \frac{1}{2}\right] = 2$ より

$$\begin{cases} -2 \leq \alpha + \frac{1}{2} < -1 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\begin{cases} 2 \leq \beta + \frac{1}{2} < 3 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。辺々足して

$$0 \leq \alpha + \beta + 1 < 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -a + 1 < 2 (\because \alpha + \beta = -a)$$

$$\therefore -1 < a \leq 1$$

となる。逆に、 $-1 < a \leq 1$ のとき、 $\textcircled{1} \sim \textcircled{3}$ をみたす $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ が存在するから、

$$x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)$$

となるように b をとれば条件を満たす。以上より、求める a の値の範囲は、 $-1 < a \leq 1$ である。

(答) $-1 < a \leq 1$

(2)

2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が

$$\begin{cases} -\frac{5}{2} \leq \alpha < -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \leq \beta < \frac{5}{2} \end{cases}$$

をみたす 2 つの実数解 α, β をもつための条件は、 $y = x^2 + ax + b$ のグラフが、 $-\frac{5}{2} \leq x < -\frac{3}{2}$ の

範囲と、 $\frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2}$ の範囲で x 軸と交わることである。すなわち、

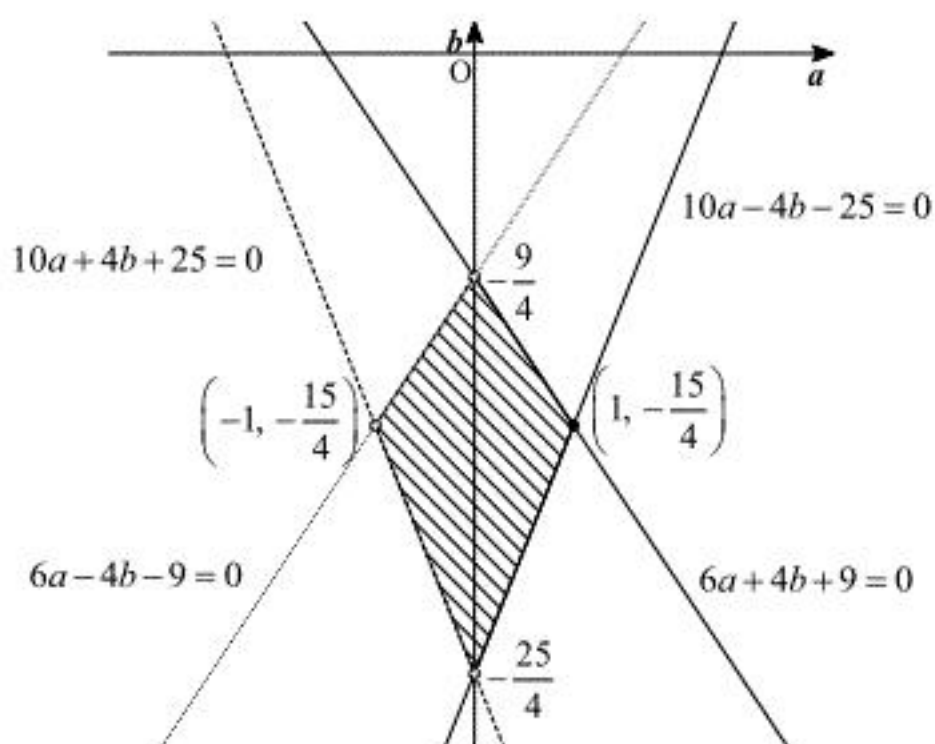
$$f\left(-\frac{5}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 25 - 10a + 4b \geq 0$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow 9 - 6a + 4b < 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow 9 + 6a + 4b \leq 0$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow 25 + 10a + 4b > 0$$

を同時に満たせばよい。したがって、 ab 平面の点 (a, b) が存在する領域は下図の斜線部分のようになる。ただし境界は実線部と●を含み、点線部と○を含まない。



(答) 前図

【Ⅲ】

(1)

カードの取り出し方はどれも同様に確からしく起こる。チーム A, B のカードの取り出し方の組み合わせは、8 枚の中から 4 枚を選び、それをチーム A のカードとし、残りのカードをチーム B のカードとすればよいから、

$${}_8C_4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70 \text{ (通り)}$$

となる。チーム A が勝つためには、チーム A のカードの数の合計が 19 以上となればよい。以下、場合分けによりチーム A のカードの数の合計が 19 以上となる組み合わせを求める。

[1] チーム A が 8 のカードを取るとき

このとき、チーム A は残りの 3 枚で合計 11 以上となればよい。残り 3 枚のカードを選ぶ組み合わせは

$${}_7C_3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35 \text{ (通り)}$$

である。余事象を考え、3 枚で 10 以下となる組み合わせは

$$(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 2, 7), (1, 3, 4) \\ (1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5)$$

の 11 通りである。よってチーム A が 8 のカードを取り、4 枚のカードの数の合計が 19 以上となるのは

$$35 - 11 = 24 \text{ (通り)}$$

である。

[2] チーム A が 8 のカードを取らず、7 のカードを取るとき

このとき、チーム A は残りの 3 枚で合計 12 以上となればよい。このときの組み合わせは

$$(1, 5, 6), (2, 4, 6), (2, 5, 6), (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 5, 6)$$

の 7 通りである。

[3] チーム A が 7, 8 のカードを取らないとき

このときチーム A の得点の最大値は

$$3 + 4 + 5 + 6 = 18$$

となり、チーム A が勝つことはできないから不適である。

以上、[1], [2], [3] より求める確率は

$$\frac{24 + 7}{70} = \frac{31}{70}$$

となる。

(答) $\frac{31}{70}$

(2)

(1)[1] よりチーム A が 8 のカードを取るときの組み合わせは 35 通りである。このときチーム A が負ける組み合わせは、残り 3 枚のカードの組み合わせが

$$(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (2, 3, 4)$$

となる 7 通りである。よって、求める確率は $\frac{7}{35} = \frac{1}{5}$ である。

(答) $\frac{1}{5}$

(3)

1 から 8 までの自然数の中から 4 つを選び、その合計が得点となるから、チーム A, B の得点を a, b とすると、得点の最大値は

$$5 + 6 + 7 + 8 = 26$$

であり、得点の最小値は

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

となる。よって a, b は

$$10 \leq a \leq 26, \quad 10 \leq b \leq 26$$

を満たす自然数である。また 1 から 8 までの自然数の合計は

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

であるから、

$$a + b = 36$$

となる。これらを満たし、 a が b の約数となる組み合わせは

$$(a, b) = (12, 24), (18, 18)$$

の 2 通りである。

[1] $(a, b) = (12, 24)$ のとき

このとき、チーム A のカードの組み合わせは

$$(1, 2, 3, 6), (1, 2, 4, 5)$$

の 2 通りである。

[2] $(a, b) = (18, 18)$ のとき

このときチーム A, B は引き分けとなる。(1) よりチーム A が勝つ組み合わせは 31 通りであり、チーム B が勝つ組み合わせも同様に 31 通りである。よって余事象を考えると、チーム A, B が引き分ける組み合わせは

$$70 - 31 \cdot 2 = 8 \text{ (通り)}$$

となる。

以上、[1], [2] より、求める確率は

$$\frac{2 + 8}{70} = \frac{1}{7}$$

である。

(答) $\frac{1}{7}$

(4)

(3) より a, b は $10 \leq a \leq 26, 10 \leq b \leq 26, a + b = 36$ を満たす自然数であるから、両チームの得点差が 8 以上となるとき、

$$a \leq 14 \text{ または } a \geq 22$$

となればよい。 $a \geq 22$ となるときには $b \leq 14$ となるので、これら 2 つの場合の数は等しい。よって、 $a \leq 14$ について考える。

[1] $a = 14$ のとき

この条件を満たすのは、

$$(1, 2, 3, 8), (1, 2, 4, 7), (1, 2, 5, 6), (1, 3, 4, 6), (2, 3, 4, 5)$$

の 5 通りである。

[2] $a = 13$ のとき

この条件を満たすのは、

$$(1, 2, 3, 7), (1, 2, 4, 6), (1, 3, 4, 5)$$

の 3 通りである。

[3] $a = 12$ のとき

この条件を満たすのは、

$$(1, 2, 3, 6), (1, 2, 4, 5)$$

の 2 通りである。

[4] $a = 11$ のとき

この条件を満たすのは、

$$(1, 2, 3, 5)$$

の 1 通りである。

[5] $a = 10$ のとき

この条件を満たすのは、

$$(1, 2, 3, 4)$$

の 1 通りである。

よって求める確率は

$$\frac{5 + 3 + 2 + 1 + 1}{70} \cdot 2 = \frac{12}{35}$$

となる。

(答) $\frac{12}{35}$