

【I】

〔解答〕

ア	イ	ウ	
10	3124	$3^5 \times 5^{20}$	
エ	オ	カ	
75	2017	$3 \times 5^4 \times 673$	
キ	ク	ケ	コ
3	125	9	7

〔解説〕

1875 を素因数分解すると $1875 = 3 \times 5^4$ であるから、正の約数の個数は

$$(1+1)(4+1)=10$$

より 10 個である。また、それらの約数の和は

$$(1+3)(1+5+5^2+5^3+5^4)=4 \cdot 781=3124$$

となる。次に約数の積について、1875 の正の約数を小さい方から順に並べると以下のようになる。

$$1, 3, 5, 15, 25, 75, 125, 375, 625, 1875$$

外側から大きい数字と小さい数字を組にしてその積を考えると

$$1 \times 1875, 3 \times 625, 5 \times 375, 15 \times 125, 25 \times 75$$

5 組の式の解は全て 1875 である。よって 1875 正の約数の積は素因数分解された形で

$$1875^5 = (3 \times 5^4)^5 = 3^5 \times 5^{20}$$

と表せる。また、正の約数の中で 6 番目に小さい約数は 75 である。2019 以下の最大の素数は 2017 である。2019 を素因数分解すると $2019 = 3 \times 673$ となるので

2019 と 1875 の最小公倍数は素因数分解された形で表すと

$$3 \times 5^4 \times 673$$

となる。 1875×2019 を素因数分解すると $1875 \times 2019 = 3^2 \times 5^4 \times 673$ となる。いま、 1875×2019 を互いに素である 2 数 a, b ($1 < a < b$) の積で表すとき、 (a, b) の組み合わせは

$$(a, b) = (3^2, 5^4 \times 673), (5^4, 3^2 \times 673), (673, 3^2 \times 5^4)$$

の 3 通りである。 $2019!$ を $1875^n = 3^n \times 5^{4n}$ で割り切れる最大の n について、 $2019!$ を素因数分解したときの 3 と 5 の指数から考える。まず 3 の指数について考える。2019 について $3^6 < 2019 < 3^7$ であることを考慮すると $2019!$ の 3 の指数は、 x を超えない最大の整数を $[x]$ で表すとすると、

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2019}{3^1} \right] + \left[\frac{2019}{3^2} \right] + \left[\frac{2019}{3^3} \right] + \left[\frac{2019}{3^4} \right] + \left[\frac{2019}{3^5} \right] + \left[\frac{2019}{3^6} \right] \\ &= 673 + 224 + 74 + 24 + 8 + 2 \\ &= 1005 \end{aligned}$$

と計算できるので 1005 である。一方で $2019!$ の 5 の指数は $5^4 < 2019 < 5^5$ を考慮すると

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2019}{5^1} \right] + \left[\frac{2019}{5^2} \right] + \left[\frac{2019}{5^3} \right] + \left[\frac{2019}{5^4} \right] \\ &= 403 + 80 + 16 + 3 \\ &= 502 \end{aligned}$$

と計算できるので 502 である。よって $2019!$ は 3 の倍数でも 5 の倍数でもない自然数 k を用いると

$$2019! = 3^{1005} \times 5^{502} \times k$$

と表せる。いま、 $2019!$ を 1875^n で割り切れるので

$$\frac{2019!}{1875^n} = \frac{3^{1005} \times 5^{502} \times k}{3^n \times 5^{4n}} = 3^{1005-n} \times 5^{502-4n} \times k$$

が整数となるから、 n の条件式は

$$1005 - n \geq 0, 502 - 4n \geq 0$$

$$\therefore n \leq \frac{251}{2}$$

となる。よって、上の条件式を満たす最大の整数 n は 125 である。 1875^{2019} を素因数分解すると $1875^{2019} = 3^{2019} \times 5^{8076}$ となる。以下は、法を 11 とする合同式を考える。 $5^2 \equiv 3$ であるから、 $5^{8076} \equiv 3^{4038}$ より、

$$1875^{2019} \equiv 3^{2019+4038} \equiv 3^{6057}$$

となる。次に $3^5 \equiv 1$ であるから

$$3^{6057} \equiv (3^5)^{1211} \cdot 3^2 \equiv 9$$

となる。よって 1875^{2019} を 11 で割った余りは 9 である。また 2019^{1875} を素数 p で割った余りが 6 であるから p の条件は $p \equiv 7$ である。よって 2019^{1875} を 7 で割った余りを考える。以下は、法を 7 とする合同式を考えると、 $3^6 \equiv 1, 673 \equiv 1$ であるから

$$2019^{1875} \equiv 3^{1875} \cdot 673^{1875} \equiv (3^6)^{312} \cdot 3^3 \cdot 1^{1875} \equiv 27 \equiv 6$$

となる。これより 2019^{1875} を 7 で割った余りは 6 であり、これは題意を満たしているので素数 p の中で最小の素数は 7 である。

【Ⅱ】

(1)

$x^2 - ax + b = 0$ が異なる 2 つの実数解を持つため、判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 4b &> 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで異なる 2 つの実数解を α, β ($\beta > \alpha$) とおくと、解と実数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = b \end{cases}$$

と表せる。いま、この 2 つの解の差 d ($d > 0$) は $d = \beta - \alpha$ と表すことが出来るので上式を利用して

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 4b \\ \therefore d &= \sqrt{a^2 - 4b} \quad (\because a^2 - 4b > 0) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a^2 - 4b > 0, d = \sqrt{a^2 - 4b}$$

(2)

(1)で導いた式は

$$b = \frac{a^2}{4} - \frac{d^2}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

と変形することが出来る。これより ab 平面上で $1 \leq a \leq 2, -1 \leq b \leq 0$ の領域に曲線

$b = \frac{a^2}{4} - \frac{d^2}{4}$ が共有点を持つような d の範囲を考える。曲線 $b = \frac{a^2}{4} - \frac{d^2}{4}$ は b 軸を軸とする下に凸な放物線であり、 d の値は曲線の b 切片に依存するため、曲線の b 切片の範囲を考える。

[1] 曲線が $(1, 0)$ を通るとき

①に $(a, b) = (1, 0)$ を代入すると d の値は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1^2}{4} - \frac{d^2}{4} \\ \Leftrightarrow d &= 1 \quad (\because d > 0) \end{aligned}$$

となる。

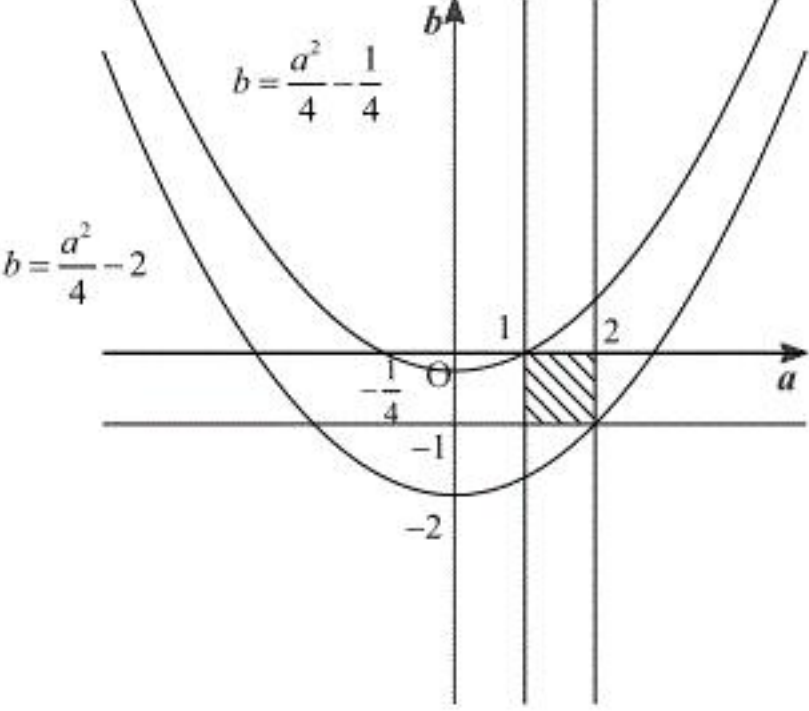
[2] 曲線が $(2, -1)$ を通るとき

①に $(a, b) = (2, -1)$ を代入すると d の値は

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{2^2}{4} - \frac{d^2}{4} \\ \Leftrightarrow d &= 2\sqrt{2} \quad (\because d > 0) \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]の場合を図示すると以下ようになる。

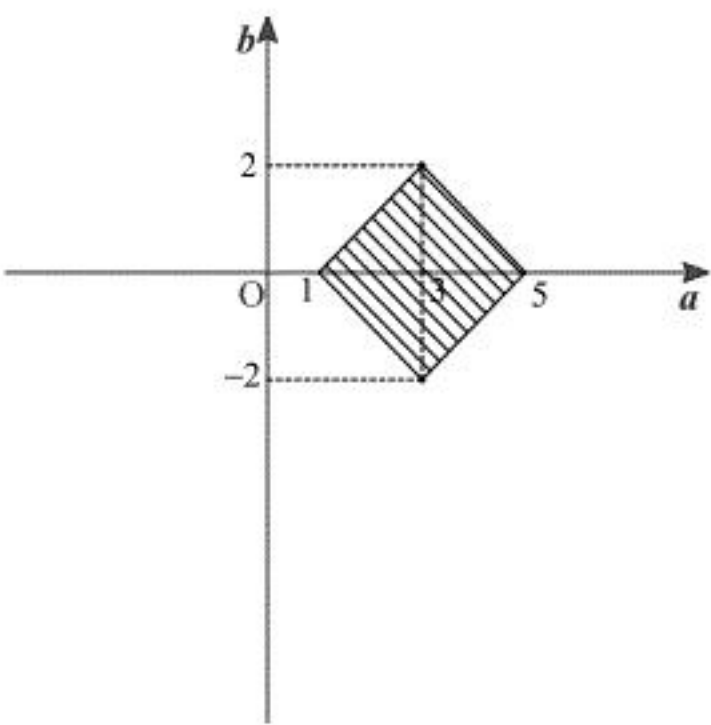


上のグラフより、[1], [2]のとき、それぞれ b 切片である $-\frac{d^2}{4}$ は最大値と最小値をとる。 $-\frac{d^2}{4}$ は $d > 0$ において単調減少の関数であるから d の範囲は $1 \leq d \leq 2\sqrt{2}$ となる。

$$(\text{答}) \quad 1 \leq d \leq 2\sqrt{2}$$

(3)

ab 平面上において $|a-3| + |b| \leq 2$ を図示すると以下の斜線部分(境界を含む)のようになる。



このとき(2)と同様に上の領域に曲線 $b = \frac{a^2}{4} - \frac{d^2}{4}$ が共有点を持つような d の範囲を b 切片の範囲を元に考える。

[1] 曲線が $b = a - 1$ に接するとき

①に $b = a - 1$ 代入すると

$$\begin{aligned} a - 1 &= \frac{a^2}{4} - \frac{d^2}{4} \\ \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 - d^2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。曲線が $b = a - 1$ に接するとき上の a についての 2 次方程式の判別式 D が $D = 0$ となるので

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow 16 - 4(4 - d^2) &= 0 \\ \therefore -\frac{d^2}{4} &= 0 \end{aligned}$$

となり、また、このときの接点は $(a, b) = (2, 1)$ となる。

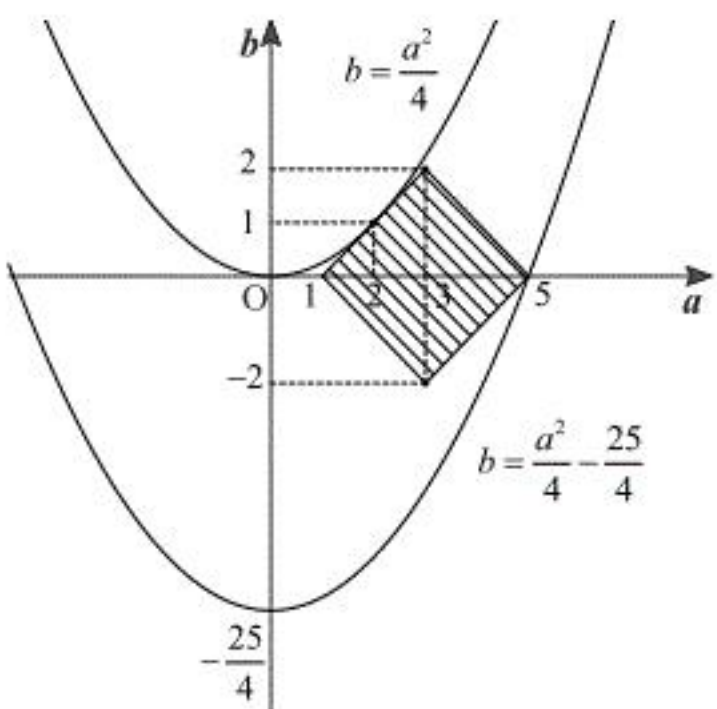
[2] 曲線が $(5, 0)$ を通るとき

①に $(a, b) = (5, 0)$ を代入すると d の値は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{5^2}{4} - \frac{d^2}{4} \\ \therefore -\frac{d^2}{4} &= -\frac{25}{4} \end{aligned}$$

となる。

[1], [2]の場合を図示すると以下ようになる。



上のグラフより[1], [2]のとき、それぞれ b 切片である $-\frac{d^2}{4}$ は最大値と最小値をとる。これより

$-\frac{d^2}{4}$ の範囲は $-\frac{25}{4} \leq -\frac{d^2}{4} \leq 0$ であり $d > 0$ を考慮すると求める d の範囲は $0 < d \leq 5$

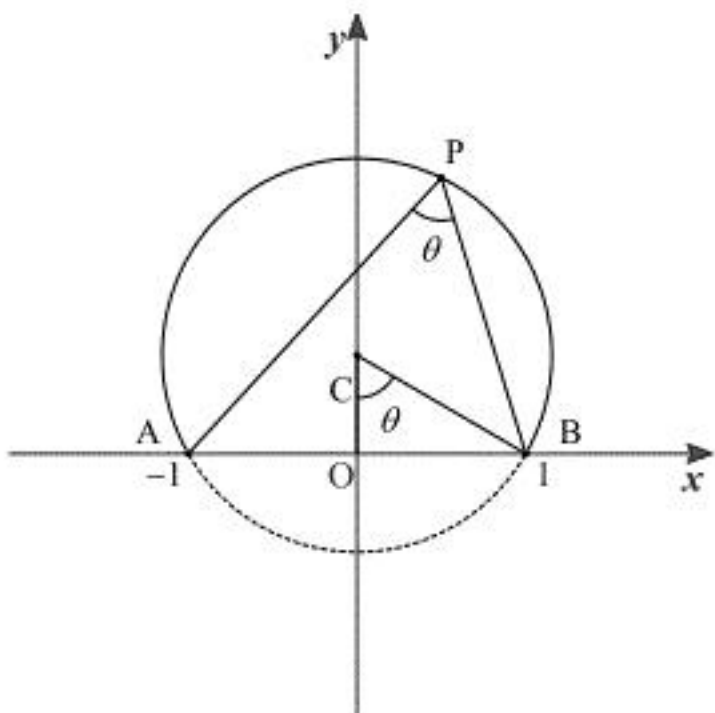
となる。

$$(\text{答}) \quad 0 < d \leq 5$$

【Ⅲ】

(1)

定点である A, B と動点 P について $\angle APB$ が $\angle APB = \theta$ で一定であるとき、円周角の定理の逆から動点 P の軌跡は A, B を通る円弧を描く。このとき AB は円弧の弦であり、 θ が鋭角であるため、動点 P は弦 AB 上によって分けられる円弧のうち長い方の弧(優弧)に存在し、 $q > 0$ にあることを考慮するとこの優弧は $y > 0$ に存在する。また、線分 AB の垂直二等分線上に円の中心があり、この点を $C(0, c)$ ($c > 0$) とすると動点 P の軌跡は以下の円弧の実線部分(ただし 2 点 A, B を除く)となる。



上図において $\angle APB = \theta$ より $\angle ACB = 2\theta$ であり y 軸は AB の垂直二等分線であるから $\angle OCB = \theta$ である。よって c の値は $c > 0$ を考慮すると

$$c = \frac{1}{\tan \theta}$$

となる。また円の半径は $\frac{1}{\sin \theta}$ であるから、動点 $P(p, q)$ の軌跡の方程式は

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{\tan \theta}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (y > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{\tan \theta}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (y > 0)$$

(2)

$\triangle PAB$ の重心 G の座標を (X, Y) とすると、 x 座標について

$$X = \frac{p+1+(-1)}{3} = \frac{p}{3}$$

$$\therefore p = 3X$$

が成り立ち、また y 座標についても

$$Y = \frac{q+0+0}{3} = \frac{q}{3}$$

$$\therefore q = 3Y$$

が成り立つ。いま、動点 P は(1)で求めた軌跡上を動くので p, q について

$$p^2 + \left(q - \frac{1}{\tan \theta}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (q > 0)$$

が成り立つ。よって上式に $(p, q) = (3X, 3Y)$ を代入すると

$$(3X)^2 + \left(3Y - \frac{1}{\tan \theta}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (3Y > 0)$$

$$\Leftrightarrow X^2 + \left(Y - \frac{1}{3 \tan \theta}\right)^2 = \frac{1}{9 \sin^2 \theta} \quad (Y > 0)$$

と変形することが出来るので、 $\triangle PAB$ の重心 G (X, Y) の軌跡の方程式は

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{3 \tan \theta}\right)^2 = \frac{1}{9 \sin^2 \theta} \quad (y > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{3 \tan \theta}\right)^2 = \frac{1}{9 \sin^2 \theta} \quad (y > 0)$$

(3)

点 H の座標を (X', Y') とする。点 H は x 座標が p であり直線 AH 上にある点である。いま、

点 P と点 B の座標は $P(p, q)$ $B(1, 0)$ であることから直線 PB の傾きは $-\frac{q}{1-p}$ ($p \neq 1$) であり、

直線 AH が直線 PB に垂直であることを考慮すると、直線 AH は $y = \frac{1-p}{q}(x+1)$ ($q \neq 0$) となる

ので点 H の座標は

$$(X', Y') = \left(p, \frac{1-p^2}{q}\right)$$

と表すことが出来る。

[1] $p = \pm 1$ のとき

点 P から x 軸に下した垂線の足はそれぞれ点 B と点 A である。このとき直線 PB に垂直

で点 A を通る直線と直線 PB の交点は点 B であり、また直線 PB に垂直で点 A を通る直

線と直線 PA の交点は点 A であるため、点 H の座標はそれぞれ

$$(X', Y') = (\pm 1, 0) \quad (\text{複号同順})$$

となる。

[2] $p \neq \pm 1$ のとき

$1-p^2 \neq 0$ であるため

$$\begin{cases} X' = p \\ Y' = \frac{1-p^2}{q} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = X' \\ q = \frac{1-X'^2}{Y'} \end{cases}$$

と変形することが出来る。いま、動点 P は(1)で求めた軌跡上を動くので p, q について

$$p^2 + \left(q - \frac{1}{\tan \theta}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (q > 0)$$

が成り立つので、上式に $(p, q) = \left(X', \frac{1-X'^2}{Y'}\right)$ を代入して

$$X'^2 + \left(\frac{1-X'^2}{Y'} - \frac{1}{\tan \theta}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$\Leftrightarrow X'^2 Y'^2 \tan^2 \theta + \left\{(1-X'^2) \tan \theta - Y'\right\}^2 = \frac{Y'^2 \tan^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\Leftrightarrow X'^2 Y'^2 \tan^2 \theta + (1-X'^2)^2 \tan^2 \theta - 2(1-X'^2) Y' \tan \theta + Y'^2 = \frac{Y'^2}{\cos^2 \theta}$$

$$\Leftrightarrow (1-X'^2)^2 \tan^2 \theta - 2(1-X'^2) Y' \tan \theta + Y'^2 \left(X'^2 \tan^2 \theta + 1 - \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X'^2 - 1)^2 \tan^2 \theta + 2(X'^2 - 1) Y' \tan \theta + Y'^2 \tan^2 \theta (X'^2 - 1) = 0$$

となる。いま、 $p \neq \pm 1$ より $X' \neq \pm 1$ であるから $X'^2 - 1 \neq 0$ である。また、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である

ため $\tan \theta \neq 0$ であるため上式は

$$(X'^2 - 1)^2 \tan^2 \theta + 2(X'^2 - 1) Y' \tan \theta + Y'^2 \tan^2 \theta (X'^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow X'^2 - 1 + \frac{2Y'}{\tan \theta} + Y'^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X'^2 + \left(Y' + \frac{1}{\tan \theta}\right)^2 = 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta}$$

$$\Leftrightarrow X'^2 + \left(Y' + \frac{1}{\tan \theta}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

と変形することが出来る。また X', Y' の範囲について、 $q > 0$ より $\frac{1-X'^2}{Y'} > 0$ が成り立つ

ので、 $Y' > 0$ のとき

$$1 - X'^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow -1 < X' < 1$$

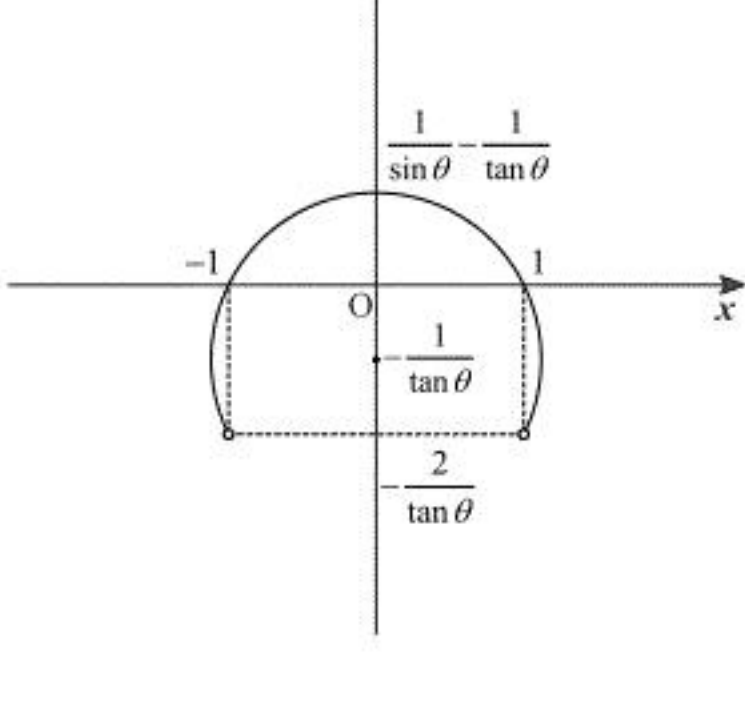
となる。また $Y' < 0$ のとき

$$1 - X'^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow X' < -1, 1 < X'$$

となる。

以上[1], [2]より点 H (X', Y') の軌跡は以下の図のようになる。



上図より、点 H の軌跡の方程式は

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{\tan \theta}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad \left(y > -\frac{2}{\tan \theta}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x^2 + \left(y + \frac{1}{\tan \theta}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad \left(y > -\frac{2}{\tan \theta}\right)$$