

【Ⅰ】

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ
$2t-\frac{9}{t+1}$	$\frac{1}{4}$	$8\sqrt{2}$	-1
オ	カ	キ	
3	$\frac{k+3}{2}$	$-\frac{1}{2}k^2+\frac{3}{2}k-1$	
ク	ケ	コ	
$-2x^2+9x-10$	1	3	

〔解説〕

(1)

$t=\log_2x$ とおくとき、

$$\begin{aligned}2\log_2x-3\log_{2x}8&=2\log_2x-3\cdot\frac{\log_28}{\log_22x}\\&=2\log_2x-3\cdot\frac{3}{\log_22+\log_2x}\\&=2t-\frac{9}{t+1}\end{aligned}$$

である。 $0<x<\frac{1}{2}$ ，すなわち $t<-1$ のとき、 $t+1<0$ に注意すると

$$\begin{aligned}2\log_2x-3\log_{2x}8&<5\\&\Leftrightarrow 2t-\frac{9}{t+1}<5\\&\Leftrightarrow 2t(t+1)-9>5(t+1) \ (\because t+1<0)\\&\Leftrightarrow 2t^2-3t-14>0\\&\Leftrightarrow (t+2)(2t-7)>0\\&\therefore t<-2, \frac{7}{2}<t\end{aligned}$$

となる。 $t<-1$ と合わせて、 $t<-2$ である。このとき、 $0<x<\frac{1}{4}$ となる。また、 $x>\frac{1}{2}$ ，すなわち $t>-1$ のとき、

$$\begin{aligned}2\log_2x-3\log_{2x}8&<5\\&\Leftrightarrow 2t-\frac{9}{t+1}<5\\&\Leftrightarrow 2t(t+1)-9<5(t+1) \ (\because t+1>0)\\&\Leftrightarrow 2t^2-3t-14<0\\&\Leftrightarrow (t+2)(2t-7)<0\\&\therefore -2<t<\frac{7}{2}\end{aligned}$$

となる。 $t>-1$ と合わせて、 $-1<t<\frac{7}{2}$ である。このとき、 $\frac{1}{2}<x<8\sqrt{2}$ となる。

(2)

放物線 C と直線 L の式を連立すると、

$$\begin{aligned}x^2-3x-1&=kx-(k^2+1)\\&\Leftrightarrow x^2-(k+3)x+k^2=0\qquad\qquad\qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。①式の判別式を D とすると、放物線 C と直線 L が異なる2点で交わるための必要十分条件は $D>0$ であるから、

$$\begin{aligned}D&>0\\&\Leftrightarrow (k+3)^2-4k^2>0\\&\Leftrightarrow k^2-2k-3<0\\&\Leftrightarrow (k+1)(k-3)<0\\&\therefore -1<k<3\end{aligned}$$

が得られる。放物線 C と直線 L の交点 P, Q の x 座標を α, β とすると、 α, β は①式の解であり、解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=k+3$$

である。したがって、線分 PQ の中点 M の x 座標は、

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{k+3}{2}$$

となる。また、これを直線 L の式に代入することで、中点 M の y 座標

$$\begin{aligned}k\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}-(k^2+1)&=k\left(\frac{k+3}{2}\right)-(k^2+1)\\&=-\frac{1}{2}k^2+\frac{3}{2}k-1\end{aligned}$$

が得られる。 $X=\frac{k+3}{2}, Y=-\frac{1}{2}k^2+\frac{3}{2}k-1$ とすると、 $k=2X-3$ であるから、これを Y に代入して、

$$\begin{aligned}Y&=-\frac{1}{2}k^2+\frac{3}{2}k-1\\&=-\frac{1}{2}(2X-3)^2+\frac{3}{2}(2X-3)-1\\&=-2X^2+9X-10\end{aligned}$$

となる。よって、中点 M の軌跡を表す方程式は $y=-2x^2+9x-10$ である。また、

$x=\frac{k+3}{2}, -1<k<3$ より x の値の範囲は、

$$\begin{aligned}-1&<k<3\\&\Leftrightarrow -1<2x-3<3\\&\therefore 1<x<3\end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 10ax + 3a^2 \\ &= (3x - a)(x - 3a) \end{aligned}$$

であるから、 $x = \frac{1}{3}a, 3a$ のとき $f'(x) = 0$ となる。 $a > 0$ より $\frac{1}{3}a < 3a$ であるから、増減表は以下
のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}a$	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	M_a	$\searrow$	m_a	$\nearrow$

増減表より、

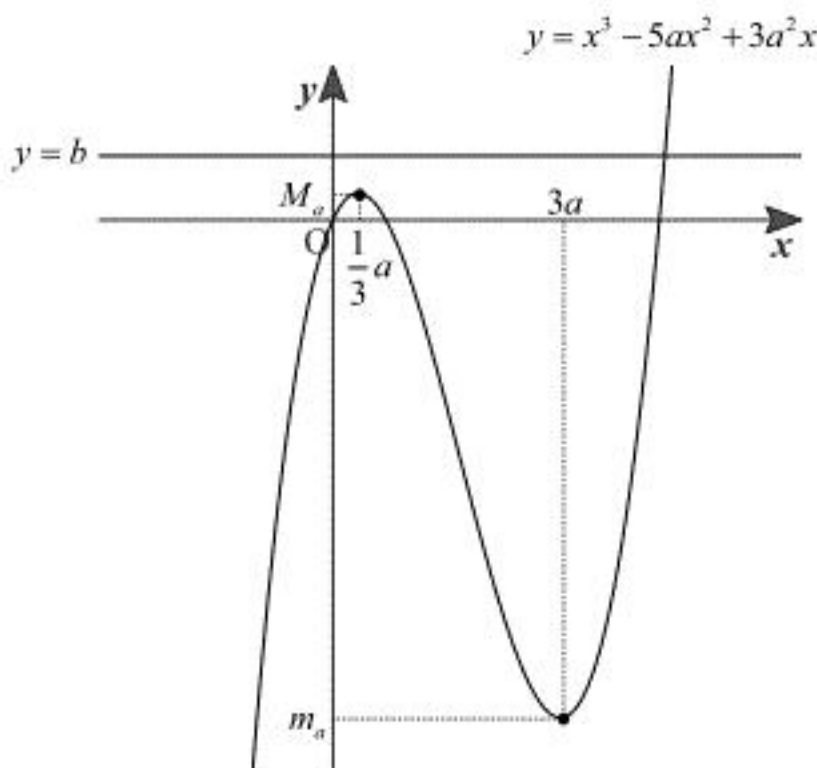
$$\begin{aligned} M_a &= f\left(\frac{1}{3}a\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}a\right)^3 - 5a\left(\frac{1}{3}a\right)^2 + 3a^2 \cdot \frac{1}{3}a \\ &= \frac{13}{27}a^3 \\ m_a &= f(3a) \\ &= (3a)^3 - 5a(3a)^2 + 3a^2 \cdot 3a \\ &= -9a^3 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad M_a = \frac{13}{27}a^3, m_a = -9a^3$$

(2)

$y = f(x)$ と $y = b$ を図示すると以下のようなになる。



3次方程式 $f(x) = b$ の実数解がただひとつとなるのは、 $M_a < b$ または $m_a > b$ 、すなわち

$\frac{13}{27}a^3 < b$ または $-9a^3 > b$ のときであるが、 $a > 0, b > 0$ より $-9a^3 > b$ は起こりえない。ここで、

a, b はさいころの出た目の数であるから、 a, b はともに $1, 2, 3, 4, 5, 6$ のいずれかの値をとる。

$a = 1$ のとき $M_1 = \frac{13}{27} < 1$ 、 $a = 2$ のとき $3 < M_2 = \frac{104}{27} < 4$ 、 $a \geq 3$ のとき $M_a \geq M_3 = 13$ であるこ

とを考慮すると、 $\frac{13}{27}a^3 < b$ を満たすのは

$$(a, b) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3)$$

の9通りである。さいころで各目が出る確率は同様に確からしいから、3次方程式 $f(x) = b$ の実数解がただひとつとなる確率は、

$$\frac{9}{6 \cdot 6} = \frac{1}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4}$$

〔Ⅲ〕

(1)

背理法を利用して、 $b-a$ が奇数であることを示す。すなわち、 $b-a$ が奇数ではないと仮定して矛盾を導く。このとき、 $b-a$ は偶数であり、 a, b の偶奇は一致する。与式を変形すると、

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{q}{p}$$

$$\Leftrightarrow p(a+1)(b+1)=abq \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。

[1] a, b がともに偶数であるとき

このとき、正の整数 m, n を用いて、 $a=2m, b=2n$ とおける。これを①式に代入すると、

$$p(2m+1)(2n+1)=4mnq$$

となる。 $2m+1, 2n+1$ は奇数であるから p は4の倍数であるが、これは p が1または素数であることに矛盾する。

[2] a, b がともに奇数であるとき

このとき、正の整数 m', n' を用いて、 $a=2m'-1, b=2n'-1$ とおける。これを①式に代入すると、

$$4m'n'p=q(2m'-1)(2n'-1)$$

となる。 $2m'-1, 2n'-1$ は奇数であるから q は4の倍数であるが、これは q が素数であることに矛盾する。

以上[1], [2]から、背理法により $b-a$ が奇数であることが示された。

(証明終)

(2)

$a=2, p=1$ を①式に代入すると、

$$3(b+1)=2bq$$

$$\Leftrightarrow (2q-3)b=3$$

となる。 $b \geq a=2$ より、

$$(2q-3, b)=(1, 3)$$

$$\therefore (q, b)=(2, 3)$$

である。

(答) $b=3, q=2$

(3)

(1)より $b-a$ は奇数であるから、 a, b の一方は偶数で、他方は奇数である。偶数かつ素数である数は2のみであり、 $a \leq b$ から、 $a=2$ 、 b は3以上の素数である。よって、①より

$$3p(b+1)=2bq$$

$$\Leftrightarrow (2q-3p)b=3p$$

となる。ここで、 $3, p$ は素数であるから、

$$(2q-3p, b)=(p, 3) \text{ または } (3, p)$$

である。

[1] $(2q-3p, b)=(p, 3)$ のとき

$b=3, q=2p$ である。いま、 q は素数、 p は1または素数であるから、 $p=1, q=2$ である。

[2] $(2q-3p, b)=(3, p)$ のとき

$b=p, 2q=3(p+1)$ である。よって、2と3が互いに素であることより、 q は3の倍数である。さらに、 q は素数であるから、 $q=3$ となる。このとき、 $b=p=1$ となるが、これは b が素数であることに矛盾する。

以上[1], [2]より、条件を満たすのは、 $(a, b, p, q)=(2, 3, 1, 2)$ である。

(答) $(a, b, p, q)=(2, 3, 1, 2)$